N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Par :

Soria Benaissa

SUJET

Sur les suites d'opérateurs (p,q)-sommants

Soutenu publiquement le : 15/12/2011 devant le jury composé de

M. A. Amroune	(Prof)	U.M'sila	Président
M. L.Mezrag	(Prof)	U.M'sila	Rapporteur
M. D. Achour	(Mc. A)	U.M'sila	Examinateur
M. D. Drihem	(Mc. B)	U.M'sila	Examinateur
M. A. Tiaiba	(Mc. B)	U.M'sila	Examinateur

Promotion : 2005/2006

Introduction

Les travaux de ce mémoire se situent dans le cadre de la théorie de sommabilité. Ils portent essentiellement sur les suites des opérateurs linéaires $(p,q)-$ sommants. Ces dernières sont bien étudies par José Luis Arregui et Oscar Blasco $[\mathrm{AB03}]$. Historiquement, la théorie des opérateurs $p-$ sommants a été étudiée par Pietsch $[\mathrm{Pie67}]$. Beaucoup de chercheurs ont étudié ce concept et ont donné aussi plusieurs définitions en généralisant celle de Pietsch. Précisément, les opérateurs linéairs $(p,q)-$ sommants généralisent celle des opérateurs $p-$ sommants. Dans ce travail, on s'intéresse à ce dernier concept dont on étudiera les suites $(p,q)-$ sommants et les suites des opérateurs $(p,q)-$ sommants. Le mémoire s'articule autour de quatre chapires.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donnant un aparçu général sur les espaces des suites à savoir l'espace des suites absolument $p-$ sommables, l'espace des suites faiblements $p-$ sommables et l'espace des suites fortement $p-$ sommables. On terminera par rappeler la définition des opérateurs linéaires $p-$ sommants (ceux sont des opérateurs entre des espaces de Banach, qui tansforment les suites faiblement $p-$ sommables en des suites fortement $p-$ sommables) ainsi que la définition des opérateurs $p-$ intégrales.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera la classe des opérateurs linéaires $(p,q)-$ sommants en donnant des théorèmes et résultats concernant cette classe d'opérateurs. Une bonne partie de ce chapitre sera consacré à étudier la classe des opérateurs $(p,q)-$ concaves. On terminera par un survol sur la classe des opérateurs linéaires positivements $(p,q)-$ sommants et leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, on fera une étude appronfondie sur la notion des suites $(p,q)-$ sommants pour $p,q\in[1,\infty)$ qui a été étudie par José Luis Arregui et Oscar Blasco $[\mathrm{AB02}]$. La suite $(x_j)_j$ dans un espace de Banach X est $(p,q)-$ sommante si pour toute suite faiblement $q-$ sommable $(x_j^*)_j$ dans un espace dual on obtient une suite $p-$ sommante des scalaires $(x_j^*(x_j))_j$.

Dans le quatrième chapitre, on introduit l'espace des suites d'opérateurs linéaires $(p,q)-$ sommants, qui a été bien étudié par $[\mathrm{AB03}]$. Dans lequel, on va traiter l'espace des suites multiplicateurs ayaur pour symbole $(E(X),F(Y))$ où $E(X)$ et $F(Y)$ sont deux espaces des suites (X et Y, $E(X)$, $F(Y)$ des espaces de Banach). On dit que (u_n) est une suite d'opérateurs multiplicateurs entre $E(X)$ et $F(Y)$ s'il existe $C>0$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x_1,\ldots,x_n\in X.$ On a

$$\left\|(u_jx_j)_{j=1}^n\right\|_{F(Y)}\leq C\|(x_j)_{j=1}^n\|_{E(X)}.$$

Si $F(Y)=\ell_p(Y)$ et $E(X)=\ell_q^w(Y),\quad 1\leq q\leq p<\infty.$ On a

$$\|(u_jx_j)\|_{\ell_p(Y)}\leq C\|(x_j)\|_{\ell_q^w(Y)}.$$

On dira que (u_j) est une suite d'opérateurs linéaires $(p,q)-$ sommants. On termine par donner quelques propriétés.

Chapitre 1
Espaces des suites et opérateurs sommants

Contenu

1.1. Les espaces des suites $p-$ sommables
1.2. Type et Cotype
1.3. Opérateurs $p-$ sommants
1.4. Opérateurs $p-$ intégrales

1.1 Les espaces des suites $p-$ sommables

On commence ce paragraphe par un rappel concernant quelques définitions, propriétés et notations pour les espaces des suites. Pour plus de détail voir [Coh73], [Api76] et [DJT95].
On désignera par X et Y deux espaces de Banach, et par X^*, Y^* leurs espaces duaux. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans $Y.$ La boule unité de X sera désignée par $\mathcal{B}_X.$
Soient n un entier, X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$ (où p^* est le conjugué de $p,$ i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).

On note $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^n(X)$) l'espace des suites (x_j) (resp. $(x_j)_{1\leq j\leq n}$) dans X absolument $p-$ sommables, muni de la norme

$$\|(x_j)\|_{\ell_p(X)} = \begin{cases} (\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_j \|x_j\|, & p = \infty \end{cases}$$

(resp. $\left\|(x_j)_{1\leq j\leq n}\right\|_{\ell_p^n(X)} = (\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}}$).

L'espace ℓ_∞ est l'espace des suites scalaires (λ_j) bornées, normé par $\|\lambda_j\|_{\ell_\infty} = \sup_j |\lambda_j|.$
L'espace c_0 désigne l'espace des suites scalaires (λ_j) telle que $\lim_j \lambda_j \to 0.$ C'est un sous espace fermé de $\ell_\infty,$ donc un espace de Banach.

On note $\ell_p^w(X)$ (resp. $\ell_p^{nw}(X)$) l'espace des suites (x_j) (resp. $(x_j)_{1\leq j\leq n}$) dans X faiblement $p-$ sommables, muni de la norme

$$\|(x_j)\|_{\ell_p^w(X)} = \begin{cases} \sup\left\{(\sum_{j=1}^{\infty}|x^*(x_j)|^p)^{\frac{1}{p}} : \|x^*\| \leq 1\right\}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_j \{\sup\{|x^*(x_j)| : \|x^*\| \leq 1\}\}, & p = \infty \end{cases}$$

(resp. $\left\|(x_j)_{1\leq j\leq n}\right\|_{\ell_p^{nw}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}=1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$).

Définitions 1.1.1 (Produit tensoriel)

(1) Soient $X,$ Y deux espaces de Banach. On note $X \otimes Y$ le produit tensoriel algébrique

$$X \otimes Y = \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j, \ n \in \mathbb{N}, \ x_j \in X, \ y_j \in Y\right\}.$$

(2) On not $X \otimes_\varepsilon Y$ l'espace $X \otimes Y$ muni de la norme

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right\|_{\varepsilon} = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} x_j(\xi) y_j(\eta)\right| \; : \; \|\xi\|_{X^*} \le 1,\; \|\eta\|_{Y^*} = 1\right\}.$$

(3) On note $X \otimes_\pi Y$ l'espace $X \otimes Y$ muni de la norme

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right\|_{\pi} = \inf\left\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \, \|y_j\|, \text{ sur toutes les représentations}\right\}.$$

(4) On note $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ le complément de $X \otimes_\varepsilon Y$ et $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ le complément de $X \otimes_\pi Y.$

Remarque 1.1.2

On sait (voir $[\text{DJT95}]$) que $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ pour tout $1 \le p < \infty$ si, et seulement si $\dim(X)$ est finie. Si $p = \infty,$ on a $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X).$ On a aussi si $1 < p \le \infty,$ $\ell_p^w(X) = \mathcal{B}(\ell_{p^*}, X)$ isométriquement et $\ell_1^w(X) = \mathcal{B}(c_0, X)$ isométriquement. En autre terme, soit $v : \ell_{p^*} \to X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_j) = x_j$ (i.e., $v = \sum_1^{\infty} e_j \otimes x_j,$ (e_j) est la base canonique de ℓ_p), alors

$$\|v\| = \|(x_n)\|_{\ell_p^w(X)}. \qquad (1.1)$$

Maintenant nous pourrons définir l'espace des suites qui a été introduit par Cohen $[\text{Coh73}]$.

Définition 1.1.3

Soit $1 < p < \infty.$ Une suite (x_j) est dite fortement $p-$ sommable, si pour toute suite $(x_j^*) \in \ell_{p^*}^w(X^*),$ la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j)$ est convergente. Dans ce cas, on note $\ell_p\langle X\rangle$ (resp. $\ell_p^n\langle X\rangle$) l'espace des suites (x_j) (resp. $(x_j)_{1\le j\le n}$) dans X fortement $p-$ sommables.

Théorème 1.1.4

Soit X *un espace de Banach,* $1 < p < \infty.$ *L'espace* $\ell_p\langle X\rangle$ *est un espace de Banach et la norme est donnée par*

$$\|(x_j)\|_{\ell_p\langle X\rangle} = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j)\right| \; : \; \|(x_j^*)\|_{\ell_{p^*}^w(X^*)} \le 1\right\}.$$

(resp. $\left\|(x_j)_{1\le j\le n}\right\|_{\ell_p^n\langle X\rangle} = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} x_j^*(x_j)\right| \; : \; \|(x_j^*)\|_{\ell_{p^*}^{nw}(X^*)} \le 1\right\}$ *).*

Les relations entre les différents espaces sont données par le théorème suivant.

Théorème 1.1.5 $[\text{Coh73, p. 15}]$

(1) *Pour* $1 < p < \infty,$ *on a* $\ell_p\langle X\rangle \subseteq \ell_p(X) \subseteq \ell_p^w(X).$ *De plus*

$$\|(x_j)\|_{\ell_p^w(X)} \leq \|(x_j)\|_{\ell_p(X)} \leq \|(x_j)\|_{\ell_p\langle X\rangle}.$$

(2) *Si* $p = 1$, *on a* $\ell_1\langle X\rangle = \ell_1(X)$ *et*

$$\|(x_j)\|_{\ell_1\langle X\rangle} = \|(x_j)\|_{\ell_1(X)}.$$

(3) *Si* $p = \infty$, *on a* $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$ *et*

$$\|(x_j)\|_{\ell_\infty(X)} = \|(x_j)\|_{\ell_\infty^w(X)}.$$

Nous ferons fréquemment l'usage de la propriété

$$\left\|(x_j)_{1\leq j\leq n}\right\|_{\ell_p^{n\omega}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}=1} \left(\sum_{j=1}^n |\langle x_j, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right\|; \|(\lambda_j)\|_{\ell_{p^*}} \leq 1\right\}.$$

En effet, pour tout $(x_j)_{1\leq j\leq n} \subset X$ et pour toute suite de scalaires (λ_j), $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\left\|(x_j)_{1\leq j\leq n}\right\|_{\ell_p^{n\omega}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}=1} \left(\sum_{j=1}^n |\langle x_j, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n \lambda_j\langle x_j, \xi\rangle\right|; \|\xi\|_{X^*} \leq 1, \|(\lambda_j)\|_{\ell_{p^*}} \leq 1\right\},$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right\|; \|(\lambda_j)\|_{\ell_{p^*}} \leq 1\right\},$$

laquelle est une conséquence de la dualité entre ℓ_p^n et $\ell_{p^*}^n$.

On sait (voir [Api76]) que, si $1 \leq p \leq \infty$, $\ell_p^n(X)^* = \ell_{p^*}^n(X^*)$ isométriquement. On a aussi si $1 \leq p \leq \infty$, $\ell_p^{n\,w}(X)^* = \ell_{p^*}^n\langle X^*\rangle$ isométriquement.

1.2 Type et Cotype

Rappelons maintenant les définitions de type et cotype des espaces de Banach. Pour plus de détail voir [Pis80], [DJT95] et [Woj91].

Définitions 1.2.1

Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire entre espaces de Banach.

On dit que T est de type p $(1 < p \leq 2)$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall\{x_1,...,x_n\} \subset X. \\ \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t) T(x_j)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Où $(r_n(t))_{n=1}^\infty$ est une suite des variables aléatoires de Radmacher. Elles sont définies comme suit pour chaque n dans $\mathbb{N}$, soit la fonction

$$\begin{array}{rcccl} r_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \{-1,+1\} \\ & & t & \longmapsto & r_n(t) = sgn \sin 2^n t\pi. \end{array}$$

On note $T_p(T)$ la plus petite constante vérifiant (1.2).

Définitions 1.2.2

Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire entre espaces de Banach.

On dit que T est de cotype q $(2 \le q < \infty)$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \{x_1,\dots,x_n\} \subset X. \\ (\sum_{j=1}^{n} \left\| T(x_j) \right\|^q)^{\frac{1}{q}} \le C(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) T(x_j) \right\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.3)$$

On note $C_q(T)$ la plus petite constante vérifiant (1.3).

Un espace de Banach X est dit de type p (resp. de cotype q) si l'opérateur identité sur X, noté Id_X, est de type p (resp. de cotype q). On note simplement $T_p(X)$ et $C_q(X)$ au lieu de $T_p(Id_X)$ et $C_q(Id_X)$.

Exemples 1.2.3

(a) X espace de Banach de type p, pour tout $0 < p \le 1$ on a

$$(\int_0^1 \| r_j(t) x_j \|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{j \le n} \| x_j \| \le (\sum_{j \le n} \| x_j \|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Où $(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ est une suite des variables aléatoires de Radmacher.

(b) Si $1 \le p \le 2$, on a ℓ_p de type p et de cotype 2.

Si $2 \le q \le \infty$, on a ℓ_q de type 2 et de cotype q.

(c) Espace de Hilbert est un espace de type 2 et de cotype 2.

1.3 Opérateurs $p-$ sommants

Nous allons donner la notion des opérateurs $p-$ sommants introduite par Pietcsh [Pie67] et le théorème de factorisation avec quelques propriétés fondamentales.

Définition 1.3.1

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dira que T est $p-$ sommant pour $0 < p < \infty$ si,

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1,\dots,x_n \in X \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \| T(x_j) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

On note

$$\Pi_p(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ linéaires } p-\text{ sommants }\},$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant la définition 1.3.1 }\}.$$

Exemples 1.3.2

Soit K un espace compact de Hausdorff, et μ une mesure positive sur $K.$ On concède $1 \le p < \infty.$

(a) Pour chaque $\varphi \in L_p(\mu),$ on définit l'opérateur de multiplication

$$\begin{array}{cccc} T_\varphi & : & C(K) & \to & L_p(\mu) \\ & & f & \mapsto & f.\varphi \end{array}$$

cet opérateur est $p-$ sommant de plus $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_p.$

(b) L'opérateur canonique

$$\begin{array}{cccc} J_p & : & C(K) & \to & L_p(\mu) \\ & & f & \mapsto & f \end{array}$$

est $p-$ sommant de plus $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}.$

(c) Pour chaque $\varphi \in L_p(\mu),$ on définit l'opérateur de multiplication

$$\begin{array}{cccc} T_\varphi & : & L_\infty(\mu) & \to & L_p(\mu) \\ & & f & \mapsto & f.\varphi \end{array}$$

cet opérateur est $p-$ sommant de plus $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_p.$

(d) L'opérateur Diagonal

$$\begin{array}{cccc} D_\lambda & : & \ell_\infty & \to & \ell_p \\ & & a_n & \mapsto & (\lambda_n a_n) \end{array}$$

est $p-$ sommant de plus $\pi_p(D_\lambda) = \|\lambda\|_p.$

En effet,

(a) Soit $\{f_1,\ldots,f_n\} \subset C(K).$ A chaque point $\omega \in K$ correspond un point de masse $\delta_\omega \in C(K)^*$ donné par $\langle\delta_\omega, f\rangle = f(\omega).$

Les points de masse forment un sous-ensemble évidemment dans $C(K)^*,$ donc le $\sup$ est atteint sur les points extrémaux.

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in C(K)^*} \Big(\sum_{j=1}^n |\langle f_j,\xi\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\omega\in K} \Big(\sum_{j=1}^n |\langle\delta_\omega, f_j\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \sup_{\omega\in K} \Big(\sum_{j=1}^n |f_j(\omega)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left\| \Big(\sum_{j=1}^n |f_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|T_\varphi(f_j)\|^p)^{1/p} &= (\sum_{j=1}^{n} \int |f_j\varphi|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, \\
&= (\int |\varphi(\omega)|^p . (\sum_{j=1}^{n} |f_j(\omega)|^p) d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}}, \\
&\le (\int |\varphi(\omega)|^p d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} \sup_{\omega\in K} (\sum_{j=1}^{n} |f_j(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}}, \\
&\le \|\varphi\|_p \left\| (\sum_{j=1}^{n} |f_j|^p)^{\frac{1}{p}} \right\|_\infty, \\
&\le \|\varphi\|_p \sup_{\xi\in C(K)^*} \left(\sum_{j=1}^{n} |\langle f_j,\xi\rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne T_φ est p -sommant et $\pi_p(T_\varphi) \le \|\varphi\|_p$.
On a l'égalité des normes puisque

$$\pi_p(T_\varphi) \ge \|T_\varphi\| \ge \|T_\varphi 1\|_p = \|\varphi\|_p.$$

(b) et **(c)** Immédiatement de **(a)**.
(d) Immédiatemment de **(c)**.

Théorème 1.3.3 (Propriété d'idéal)
Soient $T \in \Pi_p(X,Y)$, $v : E \to X$ *linéaire continu et* $w : Y \to F$ *linéaire continu (* $X,Y,E,$ *et* F *sont des espaces de Banach quelconques). Alors,*
wTv *est* $p-$ *sommant, et*

$$\pi_p(wTv) \le \|w\|\pi_p(T)\|v\|.$$

Preuve

On a $\|wTv(x)\| \le \|w\|\|T(v(x))\|, \quad \forall x \in E.$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1,\dots,x_n\}$ dans $E.$ Alors $\{v(x_1),\dots,v(x_n)\}$ dans $X,$ donc

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|T(v(x_j))\|^p)^{1/p} &\le \pi_p(T) \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\langle v(x_j),\xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}, \\
&\le \pi_p(T) \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, v^*(\xi)\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

On pose $\eta = \dfrac{v^*(\xi)}{\|v\|} \in B_{E^*},$ donc

$$(\sum_{j=1}^{n} \|T(v(x_j))\|^p)^{1/p} \le \pi_p(T)\|v\| \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j,\eta\rangle|^p)^{\frac{1}{p}},$$

d'où

$$(\sum_{j=1}^{n} \|wTv(x_j)\|^p)^{1/p} \le \|w\|\pi_p(T)\|v\| \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j,\eta\rangle|^p)^{\frac{1}{p}},$$

et par conséquent $wTv \in \Pi_p(E,F)$ et $\pi_p(wTv) \le \|w\|\pi_p(T)\|v\|.$ ■

Corollaire 1.3.4 (Injectivité)

Soient X, Y, Y_0 *des espaces de Banach, et* $1 < p < \infty.$ *Si* $i : Y_0 \to Y$ *est une isométrie. Alors,* $T \in \Pi_p(X, Y_0)$ *si, et seulement si* $iT \in \Pi_p(X, Y).$

Dans ce cas, on a $\pi_p(T) = \pi_p(iT).$

Proposition 1.3.5

Soient X, Y *deux espaces de Banach, et* $1 < p < \infty.$ *Alors les propriétés suivantes de la constante* C *et de l'opérateur linéaire* $T : X \to Y$ *sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur* $T \in \Pi_p(X, Y)$ *et* $\pi_p(T) \le C.$

(2) *Pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$ *et tout* $v : l^n_{p^*} \to X,$ *on a* $\pi_p(Tv) \le C\|v\|.$

Preuve

(1) $\Rightarrow$ **(2)**

Supposons $T \in \Pi_p(X, Y)$ et $\pi_p(T) \le C.$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : \ell^n_{p^*} \to X,$ d'après la Propriété d'idéale on a $Tv \in \Pi_p(l^n_{p^*}, Y)$ et $\pi_p(Tv) \le C\|v\|.$

(2) $\Rightarrow$ **(1)**

On définit v par $v(e_j) = x_j,$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x_j \in X,$ où (e_j) est la base canonique de $\ell^n_p.$
On a d'après (1.1)

$$\|v\| = \sup_{\xi \in B_{X^*}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \xi\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{n} \|T(v(e_j))\|^p\Big)^{1/p},\\
&\le C\|v\|,\\
&\le C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, \xi\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où T est $p-$ sommant et $\pi_p(T) \le C.$ ■

Théorème 1.3.6 (Théorème d'inclusion)

Soient $X,$ Y *deux espaces de Banach et* $0 < p < q < \infty.$ *On a* $\Pi_p(X, Y) \subseteq \Pi_q(X, Y),$ *et pour tout* $T \in \Pi_p(X, Y),$ $\pi_q(T) \le \pi_p(T).$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X.$ Si on pose $\lambda_j = \|T(x_j)\|^{(\frac{q}{p})-1},$ on aura

$$\|T(x_j)\|^q = \|T(\lambda_j x_j)\|^p.$$

Si T est $p-$ sommant, on a

$$(\sum_{j=1}^{n}\|T(x_j)\|^q)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{j=1}^{n}\|T(\lambda_j x_j)\|^p)^{\frac{1}{p}},$$
$$\leq \pi_p(T) \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^p|\langle x_j,\xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $p < q$ et d'après l'inégalité de Hölder $(\frac{1}{(q/p)} + \frac{1}{(q/q-p)} = 1),$ on obtient

$$(\sum_{j=1}^{n}\|T(x_j)\|^q)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T)(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\frac{pq}{q-p}})^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}},$$
$$\leq \pi_p(T)(\sum_{j=1}^{n}\|T(x_j)\|^q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui entraîne que

$$(\sum_{j=1}^{n}\|T(x_j)\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}},$$

et par conséquent T est $q-$ sommant et $\pi_q(T) \leq \pi_p(T).$ ■

Proposition 1.3.7 [DJT95, p. 53]

Soient $X,$ Y *deux espaces de Banach,* $v \in \Pi_q(X,Y)$ *et* $1 \leq p,q,r < \infty$ *telle que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$ *Alors pour tout* $(x_n) \in \ell_r^w(X)$ *il existe* $(\sigma_n) \in \ell_q$ *et* $(y_n) \in \ell_p^w(X),$ $\gamma = \|(x_n)\|_{\ell_r^w(X)},$ on a

(1) $vx_n = \sigma_n.y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(2) $\|\sigma_n\|_q \leq \gamma^{r/q}.$

(3) $\|(y_n)\|_{\ell_p^w} \leq \gamma^{r/p}.\pi_q(v).$

Pour la démonstration, on pourra consulter le livre [DJT95, p. 53].

Lemme 1.3.8 [AB02]

Soit X *un espace de Banach, et* $1 < p < \infty,$ *on a* $\ell_1^w(X) = \ell_p\ell_{p^*}^w(X)$ *si, et seulement si* $\mathcal{L}(c_0,X) = \Pi_p(c_0,X).$

Preuve

$\Rightarrow)$

On suppose que $\ell_1^w(X) = \ell_p\ell_{p^*}^w(X)$ et soit $T \in \mathcal{L}(c_0,X),$ $T(e_j) = x_j$ où $(x_j) \in \ell_1^w(X),$ et (e_j) est la base canonique de $c_0,$

$$T(e_j) = \alpha_j x_j^* = x_j \text{ telle que } (\alpha_j) \in \ell_p, \text{ et } (x_j^*) \in \ell_{p^*}^w(X).$$

On pose $T = w\,v$ telle que $v \in \mathcal{L}(c_0,\ell_p)$ avec $v(e_j) = \alpha_j e_j,$ et $w \in \mathcal{L}(\ell_p,X).$ On a v un opérateur diagonal, donc d'après L'exemples 1.3.2 on a v est $p-$ sommant. Donc T est un opérateur $p-$ sommant, d'après la Proposition d'idéal 1.2.3 telle que $v \in \Pi_p(c_0,\ell_p)$ et $w \in \mathcal{L}(\ell_p,X).$ Ce qui implique

$$\mathcal{L}(c_0,X) = \Pi_p(c_0,X).$$

$\Leftarrow)$

On suppose que $\mathcal{L}(c_0,X)=\Pi_p(c_0,X)$, et $(x_j)\in\ell_1^w(X)$. Soit $T\in\ \mathcal{L}(c_0,X)$ telle que

$$\begin{array}{rcccl} T & : & c_0 & \longrightarrow & X \\ & & e_j & \longmapsto & T(e_j)=x_j, \end{array}$$

donc soit $(e_j)\in\ell_1^w(c_0)$ et $T\in\Pi_p(c_0,X)$, on a d'après la Proposition 1.3.7, $T(e_j)=\alpha_j x_j^*=x_j$ où $(\alpha_j)\in\ell_p$ et $(x_j^*)\in\ell_{p^*}^w(X)$. Alors, $\ell_1^w(X)=\ell_p\ell_{p^*}^w(X)$. ■

Proposition 1.3.9 [AB02]

Soit X *un espace de Banach.*

(1) *Si* X *de cotype* 2. *Alors,* $\ell_1^w(X)=\ell_2\ell_2^w(X)$.

(2) *Si* X *de cotype* $q>2$. *Alors,* $\ell_1^w(X)=\ell_p\ell_{p^*}^w(X)$ *pour tout* $p>q$.

Preuve

(1) Si X est de cotype 2. Donc d'après le Théorème 11.14 [DJT95] on a $\mathcal{L}(c_0,X)=\Pi_2(c_0,X)$ et d'après le Lemme 1.2.7 on a $\ell_1^w(X)=\ell_2\ell_2^w(X)$.

(2) De la même façon que **(1)**. ■

Théorème 1.3.10

Soit Y *un espace de Banach de cotype* 2, *et* K *un espace compact. On a* $L(C(K),Y)=\Pi_2(C(K),Y)$.

1.4 Opérateurs $p-$ intégrales

On s'intéresse maintenant aux opérateurs $p-$ intégrales. Pour plus de détails voir [DJT95], [Woj91].

Définition 1.4.1

Soient X,Y deux espaces de Banach et $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Soit $1\leq p\leq\infty$, on dira que l'opérateur T est $p-$ intégrale s'il se factorise de la manière suivante

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{T}{\to} & Y & \overset{k_Y}{\to} & Y^{**} \\ \beta\downarrow & & & & \uparrow\alpha \\ L_\infty(\mu) & & \overset{i_p}{\to} & & L_p(\mu) \end{array}$$

où μ est une mesure de probabilité; α,β deux opérateurs linéaires bornés et k_Y l'injection naturelle et i_p l'identité.

On note

$I_p(X,Y)=\{T\in\mathcal{L}(X,Y),\ T\text{ opérateur } p-\text{intégrale }\}$; qui est un espace de Banach muni de la norme $\iota_p(T)=\inf\|\alpha\|\|\beta\|$ sur toutes les factorisations.

Proposition 1.4.2 (Inclusion **)**

Soit X,Y *deux espaces de Banach et* $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. *On a* $I_p(X,Y)\subset I_q(X,Y)$ *pour tout* $T\in I_p(X,Y)$. *De plus* $\iota_q(T)\leq\ \iota_p(T)$ *où* $1\leq p<q\leq\infty$.

Preuve

On pose que $T\in I_p(X,Y)$ donc d'après la Définition 1.4.1 et soit $1\leq p<q\leq\infty$ on a

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{k_Y} & Y^{**} \\ \beta\downarrow & & & & \uparrow\alpha \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu) \\ \cap & & & & \cap \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_q} & & L_q(\mu) \end{array}$$

Ce qui implique $T \in I_q(X,Y)$ et $\iota_q(T) \leq \iota_p(T)$. ■

Proposition 1.4.3 (Proprieté d'idéale)

Soient $T \in I_p(X,Y)$, $v : X_0 \to X$ *et* $w : Y \to Y_0$ *deux opérateurs linéaires continus,* $1 \leq p \leq \infty$ *(* $X_0, X, Y,$ et Y_0 *sont des espaces de Banach quelconques). Alors,*

$$wTv \in I_p(X_0,Y_0) \text{ et } \iota_p(wTv) \leq \|w\|\iota_p(T)\|v\|.$$

Preuve

Soit $v \in \mathcal{L}(X_0,X)$, $w \in \mathcal{L}(Y,Y_0)$ et $T \in I_p(X,Y)$ donc

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & Y_0 & & \\ & & & & & w\nearrow & & \searrow k_{Y_0} & \\ X_0 & \xrightarrow{v} & X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{k_Y} & Y^{**} & \xrightarrow{w^{**}} & Y_0^{**} \\ & \beta v\searrow & \beta\downarrow & & & & \uparrow\alpha & w^{**}\alpha\nearrow & \\ & & L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu) & & \end{array}$$

Ce qui implique $wTv \in I_p(X_0,Y_0)$ et soit $k_{Y_0}wTv = w^{**}k_Y \quad Tv \quad = w^{**}\alpha i_p\beta v$ on a

$$\begin{aligned} \iota_p(wTv) &\leq \|\beta v\|\,\|w^{**}\alpha\|, \\ &\leq \|w\|\,\|\alpha\|\,\|\beta\|\,\|v\|, \\ &\leq \|w\|\iota_p(T)\|v\|. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Maintenant on dennera les relations entre l'espace d'opérateurs p -sommants et l'espace d'opérateurs p -intégrale.

Proposition 1.4.4

Soient $1 \leq p < \infty$, *et* $T : X \to Y$ *un opérateur* p *-intégrale. Alors,* T *est un opérateur* p *-sommant et* $\pi_p(T) \leq \iota_p(T)$.

Preuve

Supposon que T est p -intégrale. Alors T se factorise de la manière suivante

$$J_Y T \;:\; X \xrightarrow{\beta} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu) \xrightarrow{\alpha} Y^{**}.$$

Comme i_p est p -sommant d'après L'exemples 1.3.2, donc d'après la Proposition 1.2.3 et le Corollaire 1.2.4 on a

$$\begin{aligned}\pi_p(J_Y T) = \pi_p(T) &= \pi_p(\alpha i_p \beta),\\ &\leq \|\alpha\| \pi_p(i_p) \|\beta\|,\\ &\leq \|\alpha\| \|\beta\| = \iota_p(T),\end{aligned}$$

donc T est p -sommant et $\pi_p(T) \leq \iota_p(T)$. ■

Théorème 1.4.5 [DJT95, Théorème 5.16]

Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *et* X, Y *deux espaces de Banach. Soit* $v : X \to Y$, $T : X \to Y$ *deux opérateures linéaires. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Si* T *est un opérateur* p *-sommant et* v *est un opérateur* q *-intégrale. Alors,* Tv *est* r *-intégrale et*

$$\iota_r(uv) \leq \pi_p(u)\iota_q(v) .$$

(2) *Si* T *est* p *-intégrale et* v *est un opérateur* q *-sommant. Alors,* Tv *est* r *-intégrale et*

$$\iota_r(uv) \leq \iota_p(v)\pi_q(u) .$$

Chapitre 2
Opérateurs $(p,q)-$ sommants

Contenu

2.1. Opérateurs linéaires $(p,q)-$ sommants
2.2. Opérateurs linéaires $(p,q)-$ concaves
2.3. Opérateurs linéaires positivements $(p,q)-$ sommants
2.4. Relation entre l'espace $\Pi_{p,q}(X,Y)$, $\Pi^{+}_{p,q}(X,Y)$ et $K_{p,q}(X,Y)$

2.1 Opérateurs linéaires (p,q) -sommants

On s'intéresse aux opérateurs $(p,q)-$ sommants et positivements $(p,q)-$ sommants. Pour plus d'informations consulter [DJT95], [Bla86].

Définition 2.1.1

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dira que T est $(p,q)-$ sommant pour $1 \leq q < p < \infty$, si

$$\begin{cases} \exists C > 0 \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1,\dots,x_n \in X \\ (\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j,\xi >|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

On note

$$\Pi_{p,q}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ opérateur linéaire } (p,q) - \text{ sommant } \},$$

et

$$\pi_{p,q}(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant la Définition 2.1.1 } \}.$$

L'espace $\Pi_{p,q}(X,Y)$ est un espace de Banach muni de la norme $\pi_{p,q}$.

Notation 2.1.2

Si $p = q$ on note $\Pi_{p,p}(X,Y) = \Pi_p(X,Y)$ et $\pi_{p,p}(T) = \pi_p(T)$.

Proposition 2.1.3

Soient X, Y *deux espaces de Banach et* $1 \leq p,q < \infty$. *Si* $p < q$ *on a* $\Pi_{p,q}(X,Y) = \{0\}$.

Preuve

On pose $p < q$ alors $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, ce qui implique $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$. Et soit $T \in \Pi_{p,q}(X,Y)$, alors pour tout $x_1,\dots,x_n$ dans X, et soit $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Donc

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (n\|Tx_1\|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ &= n^{\frac{1}{p}} \|Tx_1\|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{p}} \|Tx_1\| &\leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j,\xi >|^q)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (n|\langle x_1,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq n^{\frac{1}{q}} C \sup_{\xi \in B_{X^*}} |< x_1,\xi >|. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{\|Tx_1\|} \sup_{\xi\in B_{X^*}} |< x_1, \xi >|,$$
$$+\infty \leq \frac{C}{\|Tx_1\|} \sup_{\xi\in B_{X^*}} |< x_1, \xi >|.$$

Donc contradiction. ■

Proposition 2.1.4 (Propriété d'idéal)

Soit $T \in \Pi_{p,q}(X,Y)$, *et soit* $v : E \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire continu et* $w : Y \longrightarrow F$ *opérateur linéaire continu (* X, Y, E, *et* F *sont des espaces de Banach quelconques). Alors,*

$$wTv \in \Pi_{p,q}(E,F) \text{ et } \pi_{p,q}(wTv) \leq \|w\|\pi_{p,q}(T)\|v\|.$$

Preuve

On a $\|wTv(x)\| \leq \|w\|\|T(v(x))\|$, $\forall x \in E.$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1,\ldots,x_n \in E,$ alors

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|wT(v(x_j))\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \|w\|(\sum_{j=1}^{n} \|T(v(x_j))\|^p)^{\frac{1}{p}},\\
&\leq \|w\|\pi_{p,q}(T) \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< v(x_j), \xi >|^q)^{\frac{1}{q}},\\
&\leq \|w\|\pi_{p,q}(T) \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, v^*(\xi) >|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

On pose $\eta = \frac{v^*(\xi)}{\|v\|} \in B_{E^*}$, donc

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \|wT(v(x_j))\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \|w\|\ \pi_{p,q}(T) \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \eta\|v\| >|^q)^{\frac{1}{q}},\\
&\leq \|w\|\pi_{p,q}(T)\|v\| \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \eta >|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

D'où $wTv \in \Pi_{p,q}(E,F)$ et $\pi_{p,q}(wtv) \leq \|w\|\|\pi_{p,q}(T)\|\|v\|.$ ■

Corollaire 2.1.5

Soient X_0 *un sous espace d'un Banach* X *et* $T \in \Pi_{p,q}(X,Y)$. *Alors,* $(T/_{X_0}) \in \Pi_{p,q}(X_0,Y)$ *et* $\pi_{p,q}(T/_{X_0}) \leq \pi_{p,q}(T)$.

Proposition 2.1.6

Soient $1 \leq q < p < \infty$ *et* X, Y *deux espaces de Banach. Alors, les propriétés suivantes du constante positive* C *et d'opérateur linéaire* $T : X \to Y$ *sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur* T *est* $(p,q)-$ *sommant et* $\pi_{p,q}(T) \leq C$.

(2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $v \in \mathcal{L}(\ell_{q^*}^n, X)$ *on a* $Tv \in \Pi_{p,q}(\ell_{q^*}^n, Y)$ *et* $\pi_{p,q}(Tv) \leq C\|v\|$.

Preuve

$\Rightarrow)$

Supposons $T \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $\pi_{p,q}(T) \leq C.$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : \ell_{q^*}^n \to X$, d'après la

Propsition d'idéale 2.1.4 on a $Tv \in \Pi_{p,q}(\ell_{q^*}^n, Y)$ et $\pi_{p,q}(Tv) \leq \pi_{p,q}(T)\|v\|$ où $\pi_{p,q}(T) \leq C$ donc $\pi_{p,q}(Tv) \leq C \quad \|v\|$.

$\Leftarrow)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. On définit v par $v(e_j) = x_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$ où (e_j) est la base canonique de ℓ_q^n. On a

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|x_j\|_{\ell_q^{nw}(X)}, \\ &= \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{j=1}^{n} \|Tv(e_j)\|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq C\,\|v\|, \\ &\leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Donc $T \in \Pi_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(T) \leq C$. $\blacksquare$

Théorème 2.1.7 (Inclusion)

Soient X, Y *deux espaces de Banach et* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, *on a* $\Pi_{p_1,q_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2,q_2}(X, Y)$, *et pour tout* T *dans* $\Pi_{p_1,q_1}(X, Y)$, $\pi_{p_2,q_2}(T) \leq \pi_{p_1,q_1}(T)$, *où* $1 \leq q_j \leq p_j < \infty, \quad j \in \{1, 2\}$ *et* $p_1 \leq p_2$, *et* $q_1 \leq q_2$, *où* $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}$.

Preuve

Soient $p_1 \leq p_2$ et $q_1 \leq q_2$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in X$, et $T \in \Pi_{p_1,q_1}(X, Y)$ on pose $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}$. Et $\lambda_j = \|Tx_j\|^{\frac{p_2}{p}}$, donc

$$\begin{aligned} \|Tx_j\|^{p_2} &= \|T(\lambda_j x_j)\|^{p_1}, \\ (\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2})^{\frac{1}{p_1}} &= (\sum_{j=1}^{n} \|T(\lambda_j x_j)\|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}, \\ &\leq \pi_{p_1,q_1}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{q_1} |< x_j, \xi >|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder $(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2 - q_1}{q_2} = 1)$ on obtient

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2})^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(T)(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^q)^{\frac{1}{q}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}, \\ &\leq \pi_{p_1,q_1}(T)(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2 \frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \le \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}$, on a $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \le \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$, donc

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2})^{\frac{1}{p_1}} &\le \pi_{p_1,q_1}(T)(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2})^{\frac{1}{q}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}},\\ &\le \pi_{p_1,q_1}(T)(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2})^{\frac{1}{p}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}},\end{aligned}$$

d'où

$$(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} \le \pi_{p_1,q_1}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \xi >|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}.$$

Par conséquent $T \in \Pi_{p_2,q_2}(X,Y)$ et $\pi_{p_2,q_2}(T) \le \pi_{p_1,q_1}(T)$. ■

2.2 Opérateurs $(p,q)-$ concaves

Dans ce paragraphe, nous donnerons les définitions des espaces de Banach réticulés suivi de quelques exemples et remarques. Pour plus de détails sur cette notion (voir J. L. Krivine [Kri74] et le livre de J. Lindestrauss et L. Tzafriri [LT96]).

Définition 2.2.1

Soit X un espace vectoriel réel ordonné. X est réticulé (resp. complètement réticulé) si,

$$\begin{cases} \forall x,y \in X,\ \sup\{x,y\} \in X \ et\ \inf\{x,y\} \in X \\ (\text{ resp. } \forall A (\neq \emptyset) \subset X,\ A \text{ majoré} \Rightarrow \sup A \in X, \text{ et } A \text{ minoré} \Rightarrow \inf A \in X\ ). \end{cases}$$

Définition 2.2.2

Soit X un espace de Banach réel partiellement ordonné. X est un espace de Banach réticulé (resp. complètement réticulé) si, X est réticulé (resp. complètement réticulé) et

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad \||x|\| = \|x\|, \\ \forall x,y \in X \ \ |x| \le |y| \Rightarrow \|x\| \le \|y\|, \end{cases}$$

où

$$|x| = \sup\{x, -x\}.$$

Exemples 2.2.3

Les espaces L_p sont des espaces de Banach complètement réticulés. $C(K)$ est réticulé mais non complètement réticulé en général.

Proposition 2.2.4 [DJT95, proposition 16.2]

Soit X, un espace de Banach réticulé et $x_1, \ldots, x_n \in X$. Alors

(1) Pour $1 \leq p < \infty$, on a $$(\sum_{j\leq n} \| x_j \|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{ \sum_{j\leq n} a_j x_j;\ a \in B_{\ell^n_{p^*}} \right\}.$$

(2) $$\sup_{j\leq n} |x_j| = \sup\left\{ \sum_{j\leq n} a_j x_j;\ a \in B_{\ell^n_1} \right\}.$$

Définition 2.2.5

Soient X, Y deux espaces de Banach dont X est réticulé, $1 \leq q \leq p < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dit que T est $(p,q)-$ concave si

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in X \\ (\sum_{j\leq n} \| Tx_j \|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\| (\sum_{j\leq n} |x_j|^q)^{\frac{1}{q}} \right\|. \end{cases}$$

On note
$$K_{p,q}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ opérateurs } (p,q) - \textit{concaves} \},$$
et
$$k_{p,q}(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant la définition 2.2.1}\}.$$

Notation 2.2.6

Si $p = q$ on note $K_{p,p}(X,Y) = K_p(X,Y)$ et $k_{p,p}(T) = k_p(T)$.

Le théorème suivant présente la relation entre les opérateurs $(p,q)-$ concaves et les opérateurs (p,q) -sommants. Pour la démonstration, on pourra consulter [DJT95, p. 331].

Théorème 2.2.7 [DJT95, Théorème 16.5]

Soient X un espace de Banach réticulé, Y un espace de Banach et $C > 0$. Soit $1 \leq q \leq p < \infty$, l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est $(p,q) -$ concave avec $k_{p,q}(T) \leq C$ si, et seulement si pour tout espace compact de Hausdorff K, et tout opérateur positive $v : C(K) \to Y$ on a l'opérateur $Tv : C(K) \to Y$ est $(p,q) -$ sommant et $\pi_{p,q}(Tv) \leq C\|v\|$.

Preuve

Soit $v : C(K) \to Y$ opérateur positive, et $f_1,\ldots,f_n \in C(K)$. Donc d'après la Proposition 2.2.4 on a

$$\begin{aligned} (\sum_{j\leq n} |vf_j|^q)^{\frac{1}{q}} &= \sup\left\{ v(\sum_{j\leq n} a_j f_j);\ a \in B_{\ell^n_{p^*}} \right\}, \\ &\leq v \sup\left\{ \sum_{j\leq n} a_j f_j;\ a \in B_{\ell^n_{p^*}} \right\}, \\ &\leq v(\sum_{j\leq n} |f_j|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Et Soit T un opérateur $(p,q) -$ concave, $k_{p,q}(T) \leq C$. Alors

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j\leq n}|Tvf_j|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq C\left\|(\sum_{j\leq n}|vf_j|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|, \\
&\leq C\|v\|\left\|(\sum_{j\leq n}|f_j|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|, \\
&\leq C\|v\|\,\|f_j\|_{\ell_q^w(C(K))},
\end{aligned}
$$

ce qui implique Tv est $(p,q)-$ sommants et $\pi_{p,q}(Tv) \leq C\|v\|$. ■

Corollaire 2.2.8

Soient $1 \leq q < p < \infty$, T un opérateur défini entre espace de Banach réticulé et espace de Banach. L'opérateur T est $(p,q)-$ concave si, et seulement si T est $(p,1)-$ sommant.

Corollaire 2.2.9

Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach, $2 < p < \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) *L'opérateur T est $(p,1)-$ sommant.*

(2) *L'opérateur T est $(p,q)-$ concave, $1 \leq q < p$.*

(3) *Il existe un constante $C > 0$, pour tout $x_1,\ldots,x_n$ dans X on a*

$$
(\sum_{1\leq j\leq n}\|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C(\int_0^1\left\|\sum_{1\leq j\leq n}r_j(t)x_j\right\|^2)^{\frac{1}{2}}.
$$

Où $(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ est une suite des variables aléatoires de Radmacher.

2.3 Opérateurs linéaires positivements $(p,q)-$ sommants

Définition 2.3.1

Soient $1 \leq q < p < \infty$ et X un espace de Banach réticulé, Y un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dira que T est positivement $(p,q)-$ sommant, si

$$
\begin{cases}
\exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1,\ldots,x_n \geq 0 \text{ dans } X \\
(\sum_{j=1}^{n}\left\|Tx_j\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1}(\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{cases}
\qquad (2{,}1)
$$

Si $q \leq p = \infty$ on a

$$
\sup_{1\leq j\leq n}\left\|T x_j\right\| \leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1}(\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2{,}2)
$$

On note

$$
\Pi_{p,q}^{+}(X,Y) = \{\, T : X \to Y \text{ opérateur positivement } (p,q)-\text{sommant} \,\},
$$

et

$$
\pi_{p,q}^{+}(T) = \inf\{\, C, \text{ vérifiant (2.1) et (2.2) } \}.
$$

Notation 2.3.2

Si $p = q$ on note $\Pi_{p,p}^{+}(X,Y) = \Pi_p^{+}(X,Y)$ et $\pi_{p,p}^{+}(T) = \pi_p^{+}(T)$.

Remarque 2.3.3

Soit X un espace de Banach réticulé, Y un espace de Banach. Si $1 \leq q < p = \infty$ on a $\Pi^+_{\infty,q}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 2.3.4

Soit X un espace de Banach réticulé, Y un espace de Banach et $1 \leq p,q < \infty$. Si $p < q$ on a $\Pi^+_{p,q}(X,Y) = \{0\}$.

Preuve

On pose $p < q$ alors $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, ce qui implique $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$. Et soit $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y)$, alors pour tout $x_1,\ldots,x_n \geq 0$ dans X, et soit $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Donc

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (n\|Tx_1\|^p)^{\frac{1}{p}},\\ &= n^{\frac{1}{p}}\|Tx_1\|,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}n^{\frac{1}{p}}\|Tx_1\| &\leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}},\\ &\leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (n|\langle x_1,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}},\\ &\leq n^{\frac{1}{q}} C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} |\langle x_1,\xi\rangle|,\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} &\leq \frac{C}{\|Tx_1\|} \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} |\langle x_1,\xi\rangle|.\\ +\infty &\leq \frac{C}{\|Tx_1\|} \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} |\langle x_1,\xi\rangle|.\end{aligned}$$

Donc contradiction. ■

Proposition 2.3.5 (Propriété d'idéal)

Soient $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y)$, $v : E \to X$ opérateur linéaire continu et $v \geq 0$, $w : Y \to F$ opérateur linéaire continu (E, X, deux espaces de Banach réticulés, Y, F deux espaces de Banach). Alors, wTv est positivement $(p,q)-$ sommant et $\pi^+_{p,q}(wTv) \leq \|w\|\pi^+_{p,q}(T)\|v\|$.

Preuve

On a $\|wTv(x)\| \leq \|w\|\|T(v(x))\|$, $\forall x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1,\ldots,x_n \geq 0$ dans E, alors

$$(\sum_{j=1}^{n} \|wT(v(x_j))\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|w\|(\sum_{j=1}^{n} \|T(v(x_j))\|^p)^{\frac{1}{p}},$$
$$\leq \|w\|\pi^+_{p,q}(T) \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n} |< v(x_j), \xi >|^q)^{\frac{1}{q}},$$
$$\leq \|w\|\pi^+_{p,q}(T) \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, v^*(\xi) >|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

On pose $\eta = \frac{v^*(\xi)}{\|v\|} \in B_{E^*}$, donc

$$(\sum_{j=1}^{n} \|wT(v(x_j))\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|w\| \pi_{p,q}(T) \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \eta\|v\| >|^q)^{\frac{1}{q}},$$
$$\leq \|w\|\pi_{p,q}(T)\|v\| \sup_{\eta\in B_{E^*}} (\sum_{j=1}^{n} |< x_j, \eta >|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où $wTv \in \Pi^+_{p,q}(E,F)$ et $\pi^+_{p,q}(wtv) \leq \|w\|\|\pi^+_{p,q}(T)\|\|v\|.$ ■

Proposition 2.3.6 (Inclusion)

Soient X *un espace de Banach réticulé,* Y *espace de Banach et* $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty.$

(1) *Si* $1 \leq q_2 \leq q_1$, *on a* $\Pi^+_{p,q_1}(X,Y) \subseteq \Pi^+_{p,q_2}(X,Y).$

(2) *Si* $p_1 < p_2$ *et* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2}$, *on a* $\Pi^+_{p_1,q_1}(X,Y) \subseteq \Pi^+_{p_2,q_2}(X,Y)$ *(* $\Pi^+_{p_1}(X,Y) \subseteq \Pi^+_{p_2}(X,Y)$ *).*

(3) *Si* $X_1 \subseteq X_2$ *et* $\overline{X_1} = X_2$, *on a* $\Pi^+_{p,q}(X_2,Y) \subseteq \Pi^+_{p,q}(X_1,Y).$

Preuve

(1) Si $q_2 \leq q_1$ et $T \in \Pi^+_{p,q_1}(X,Y)$ on a,

$$(\sum_{j=1}^{n}\|T x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^+_{p,q_1}(T) \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j, \xi\rangle|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}},$$
$$\leq \pi^+_{p,q_1}(T) \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j, \xi\rangle|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}.$$

Donc, $T \in \Pi^+_{p,q_2}(X,Y)$ et $\pi^+_{p,q_1}(T) \leq \pi^+_{p,q_2}(T).$

(2) est évidente d'après le Théorème 2.1.7.

(3) On suppose que $X_1 \subset X_2$, alors $X_1^* \subset X_2^*$ et $\|\xi\|_{X_2^*} \leq \|\xi\|_{X_1^*}.$ Et soit $T \in \Pi^+_{p,q}(X_2,Y).$ Alors,

$$(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|\xi\|_{X_2^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}| \langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}},$$
$$\leq C \sup_{\|\xi\|_{X_1^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}| \langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui implique $T \in \Pi^+_{p,q}(X_1, Y)$. ■

Proposition 2.3.7 [Bla86]

Soient $1 \leq q < p \leq \infty$, *et* X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y)$.

(2) *Il existe* $C > 0$, *pour tout* $x_1,\ldots,x_n \geq 0$ *dans* X, *tel que*

$$(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1} \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\|_X, \ 1 < q \leq \infty$$
$$\leq C \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|_X, \ q = 1.$$

(3) *L'opérateur* T *est défini comme suit*

$$\begin{array}{rccc} T : & \ell_q^w(X) & \longrightarrow & \ell_p(Y) \\ & (x_j) & \longmapsto & (Tx_j). \end{array}$$

Où $(x_j)_j$ *est une suite positive.*

(4) $\widehat{T} : \ell_q^{w+}(X) \longrightarrow \ell_p(Y)$ *tels que* $\widehat{T}(x_n) = (Tx_n)$.

Preuve

(1) ⇔ (2)

On pose que $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y)$, alors

$$(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}| \langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $1 < q \leq \infty$ on a

$$\sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle \alpha_j x_j,\xi\rangle|\Big),$$

$$= \sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\left|\sum_{j=1}^{n}\langle \alpha_j x_j,\xi\rangle\right|,$$

$$= \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\left|\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\xi\rangle\right|,$$

$$= \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\|_X,$$

donc

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\|_X.$$

Si $q = 1,$ on a

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le C\sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|\Big),$$

$$\le C\sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\Big(\left|\langle\sum_{j=1}^{n}x_j,\xi\rangle\right|\Big),$$

$$\le C\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|_X.$$

(1) ⇔ **(3)** est évidente.

(1) ⇔ **(4)**

Soit $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y),$ alors

$$\sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j^+,\xi\rangle\right|^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j^+\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j^-\|^p)^{\frac{1}{p}},\\
&\leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j^+,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}} + C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j^-,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}},\\
&\leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j^+,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}} + C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j^+,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}},\\
&\leq 2C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}\left|\langle x_j^+,\xi\rangle\right|^q)^{\frac{1}{q}},\\
\left\|\widehat{T}x_j\right\|_{\ell_p(Y)} &\leq 2C\,\|x_j\|_{\ell_q^{w+}(X)},
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\widehat{T} \quad : \quad \ell_q^{w+}(X) &\rightarrow \ell_p(Y)\\
x_n &\mapsto \widehat{T}(x_j) = Tx_j.
\end{aligned}
$$

Ce qui termine la démonstration. ■

2.4 Relation entre les espaces $\Pi_{p,q}(X,Y)$, $\Pi^+_{p,q}(X,Y)$ et $K_{p,q}(X,Y)$

Les propriétés suivantes dont on donnera les démonstrations se trouvent dans [Bla86].

Proposition 2.4.1

Soient $1 \leq q < p \leq \infty$, *et* X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach. Alors*

$$\Pi_{p,q}(X,Y) \subseteq \Pi^+_{p,q}(X,Y) \subseteq K_{p,q}(X,Y).$$

Preuve

(1) On suppose que $T \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $x_1,\ldots,x_n \geq 0$ dans X, alors

$$(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui implique $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y)$ et $\Pi_{p,q}(X,Y) \subseteq \Pi^+_{p,q}(X,Y)$.

(2) On suppose que $T \in \Pi^+_{p,q}(X,Y)$, d'après la Proposition 2.3.6 on a

$$\|T(x_j)\|_{\ell_p(X)} \leq 2C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle |x_j|,\xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Soit

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^q)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \\
\left\| (\sum_{j=1}^{n}|x_j|^q)^{\frac{1}{q}} \right\| &= \left\| \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|, \\
&\leq \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|, \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j, \xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n}\| Tx_j \|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq 2C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j, \xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq 2C \left\| (\sum_{j=1}^{n}|x_j|^q)^{\frac{1}{q}} \right\|.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique $T \in K_{p,q}(X,Y)$ et $k_{p,q}(T) \leq 2C.$ ■

Proposition 2.4.2

Soient X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach et* $1 \leq p,q < \infty.$ *Alors*

(1) $\Pi^+_{p,1}(X,Y) = K_{p,1}(X,Y).$

(2) $\Pi^+_{p,1}(X,Y) \subseteq K_{p,q}(X,Y)$ *pour tout* $q < p.$

Preuve

(1) On pose $T \in K_{p,1}(X,Y),$ alors $T \in \Pi_{p,1}(X,Y)$ d'après le Corollaire 2.2.8, et d'après la Proposition 2.4.1 on a $T \in \Pi^+_{p,1}(X,Y)$ donc

$$K_{p,1}(X,Y) \subseteq \Pi^+_{p,1}(X,Y). \qquad (2,3)$$

On pose $T \in \Pi^+_{p,1}(X,Y),$ d'après la Proposition 2.4.1 on a

$$\Pi^+_{p,1}(X,Y) \subseteq K_{p,1}(X,Y). \qquad (2.4)$$

D'après (2.3) et (2.4)

$$\Pi^+_{p,1}(X,Y) = K_{p,1}(X,Y). \qquad (2.5)$$

(2) D'après Maurey [Mau74] on a

$$K_{p,1}(X,Y) \subseteq K_{p,q}(X,Y), \text{ si } q > p. \qquad (2.6)$$

Donc d'après (2.5) et (2.6) on a bien que

$$\Pi^{+}_{p,1}(X,Y) \subseteq K_{p,1}(X,Y) \subseteq K_{p,q}(X,Y).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 2.4.3

Soient X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach et* $1 \leq q \leq p < \infty.$ *Alors*

(1) $T \in \Pi_{p,1}(X,Y)$ *si, et seulement si pour tout* $v \in \mathcal{L}(c_0,X),$ *on a* $Tv \in \Pi^{+}_{p,1}(c_0,Y)$ *et* $\pi^{+}_{p,1}(Tv) \leq C \quad \|v\|.$

(2) $T \in \Pi^{+}_{p,1}(X,Y)$ *si, et seulement si pour tout opérateur positif* v *dans* $\mathcal{L}(c_0,X),$ on a $Tv \in \Pi^{+}_{p,1}(c_0,Y)$ *et* $\pi^{+}_{p,1}(Tv) \leq C\|v\|.$

(3) $T \in K_{p,q}(X,Y)$ *si, et seulement si pour tout opérateur positif dans* $\mathcal{L}(C(\Omega),X)$ on a $Tv \in \Pi^{+}_{p,q}(C(\Omega),Y)$ *et* $\pi^{+}_{p,q}(Tv) \leq C\|v\|.$

Preuve

(1) $\Rightarrow)$ Soit $T \in \Pi_{p,1}(X,Y)$ et soit $v \in \mathcal{L}(c_0,X),$ donc $Tv \in \Pi_{p,1}(c_0,Y)$ d'après la Proposition 2.1.3 et d'après la Proposition 2.4.1 on a $Tv \in \Pi^{+}_{p,1}(c_0,Y)$ et $\pi^{+}_{p,1}(Tv) \leq C \quad \|v\|.$

$\Leftarrow)$ On suppose que $v \in \mathcal{L}(c_0,X)$ et $v > 0,$ d'après (1.1) on a

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|x_n\|_{\ell_1^w(X)}, \\ &= \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j,\xi\rangle|, \end{aligned}$$

et soit (e_j) la base canonique de c_0 tq $(e_j) > 0$ on a $v(e_j) = x_j.$ Donc

$$(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{j=1}^{n} \|Tv(e_j)\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

et d'après la Proposition 2.3.6 on a

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{n} \|Tv(e_j)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq C\|v\| \left\| \sum_{j=1}^{n} e_j \right\| \\ & C \sup_{\|\xi\|_{X^*}\leq 1} (\sum_{j=1}^{n} |\langle x_j,\xi\rangle|). \end{aligned}$$

Ce qui implique $T \in \Pi_{p,1}(X,Y),$ et $\pi^{+}_{p,1}(Tv) \leq C \quad \|v\|.$

(2) Evidente comme **(1)**.

(3) Soit $T \in K_{p,q}(X,Y)$ et $v : C(\Omega) \to X$ un opérateur positif, alors d'après le Théorème

2.2.7 on a

$$Tv \in \Pi_{p,q}(C(X),Y) \text{ et } \pi_{p,q}(Tv) \leq C\|v\|.$$

D'après la Proposition 2.4.1 on a, $Tv \in \Pi^+_{p,q}(C(\Omega),Y)$ et $\|Tv\|_{\Pi^+_{p,q}} \leq C \|v\|$. ■

Proposition 2.4.4

Soit Y *un espace de Banach,* $1 \leq q \leq p \leq \infty$. *On a*

(1) $\Pi^+_{p,q}(\ell_1,Y) = \mathcal{L}(\ell_1,Y)$.

(2) $\Pi^+_{p,q}(c_0,Y) = \Pi_{p,q}(c_0,Y) = K_{p,q}(c_0,Y)$.

Preuve

(1) Si $p = \infty$ on a $\Pi^+_{\infty,q}(\ell_1,Y) = \mathcal{L}(\ell_1,Y)$, d'après la Remarque 2.3.3.

(2) Il faut démontrer

(a) $\Pi_{p,q}(c_0,Y) \subseteq \Pi^+_{p,q}(c_0,Y) \subseteq K_{p,q}(c_0,Y)$.

(b) $K_{p,q}(c_0,Y) \subseteq \Pi^+_{p,q}(c_0,Y) \subseteq \Pi_{p,q}(c_0,Y)$.

(a) D' après la Proposition 2.4.1 on a,

$$\Pi_{p,q}(c_0,Y) \subset \Pi^+_{p,q}(c_0,Y) \subset K_{p,q}(c_0,Y). \tag{2.7}$$

(b) On pose $T \in K_{p,q}(c_0,Y)$, alors

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq C\left\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\right\|_{c_0}, \\
&\leq C\left\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\right\|_{\infty}, \\
&\leq C\sup_k\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_{jk}|^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq C\sup_k \sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_{jk}\alpha_j|\Big), \\
&\leq C\sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_j\right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Donc d'après la Proposition 2.3.7 on a

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq C\sup_{\sum \alpha_j^{q^*}=1}\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_j\right\|_{\infty}, \\
&\leq C\sup_{\|\xi\|_{(C_0)^*}\leq 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq C\sup_{\|\xi\|_{\ell_1}\leq 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle x_j,\xi\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$T \in \Pi^+_{p,q}(c_0,Y) \Rightarrow K_{p,q}(c_0,Y) \subset \Pi^+_{p,q}(c_0,Y).$$

Alors,

$$K_{p,q}(c_0,Y) \subset \Pi^+_{p,q}(c_0,Y) \subset \Pi_{p,q}(c_0,Y). \qquad (2.8)$$

Donc d'après (2.7) et (2.8) on a

$$\Pi_{p,q}(c_0,Y) = \Pi^+_{p,q}(c_0,Y) = K_{p,q}(c_0,Y).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 2.4.5

Soit Y *un espace Banach, et* $1 < p \leq \infty$ *alors,*

$$\Pi^+_p(\ell_{p^*},Y) = \Pi^+_1(\ell_{p^*},Y) = \ell_p(Y).$$

Preuve

On va démontrer que $\ell_p(Y) \subseteq \Pi^+_1(\ell_{p^*},Y) \subseteq \Pi^+_p(\ell_{p^*},Y) \subseteq \ell_p(Y)$.

On pose $(x_j) \in \ell_p(Y)$ et soit T un opérateur défini comme suit

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \ell_{p^*} & \to & Y \\ & & \xi_n & \mapsto & T(\xi_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j. \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \| T(\xi_j) \| &= \sum_{j=1}^{m} \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_{jn} x_n \right\|, \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_{jn} \| x_n \|, \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{j=1}^{m} \xi_{jn}) \| x_n \|, \\ &\leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \|^p)^{\frac{1}{p}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j \right\|_{\ell_{p^*}}, \\ &\leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{\|\xi\|_{(\ell_{p^*})^*} \leq 1} (\sum |\langle \xi_j, \xi \rangle|). \end{aligned}$$

Donc $T \in \Pi^+_1(\ell_{p^*},Y)$ et

$$\ell_p(Y) \subseteq \Pi^+_1(\ell_{p^*},Y). \qquad (2.9)$$

D'après la Proposition 2.3.6 on a

$$\Pi^+_1(\ell_{p^*},Y) \subseteq \Pi^+_p(\ell_{p^*},Y). \qquad (2.10)$$

On pose $T \in \Pi^+_p(\ell_{p^*},Y)$, alors

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n}\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{j=1}^{n}\|T(e_j)\|^p)^{\frac{1}{p}},\\
&\leq C \sup_{\|\xi\|_{(\ell_p)^*}\leq 1} (\sum|\langle e_j,\xi\rangle|),\\
&\leq C,\\
&\leq \infty.
\end{aligned}
$$

D'où $(x_j) \in \ell_p(Y)$, donc

$$\Pi_p^+(\ell_{p^*},Y) \subseteq \ell_p(Y). \qquad (2.11)$$

D'après (2.9) et (2.10) et (2.11) on a

$$\ell_p(Y) \subseteq \Pi_1^+(\ell_{p^*},Y) \subseteq \Pi_p^+(\ell_{p^*},Y) \subseteq \ell_p(Y).$$

Et par conséquent,

$$\Pi_p^+(\ell_{p^*},Y) = \Pi_1^+(\ell_{p^*},Y) = \ell_p(Y)$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Chapitre 3
Les espaces des suites $(p,q)-$ sommants

Contenu

3.1. Défintions
3.2. Propriétés

3.1 Défintions

L'essentiel de ce chapitre est tiré à partir l'article de J. L. Arregui et O. Blasco [AB02]. Il nous sera utile pour le chapitre quatre.

Définition 3.1.1

Soient $1 \leq p, q < \infty$; X un espace de Banach et (x_j) une suite dans X. On dit que (x_j) est $(p, q) -$ sommant si

$$\begin{cases} \exists C \geq 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^* \\ (\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

On note

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \{ \text{ des suites } (x_j) \subset X, \ (p,q) - \text{sommants } \},$$

et

$$\pi_{p,q}[x_j, X] = \pi_{p,q}[x_j] = \inf\{ C, \text{ vérifiant la définition 3.1.1 } \}.$$

L'espace $\ell_{\pi_{p,q}}(X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\pi_{p,q}$.

Notation 3.1.2

Si $p = q$, on note $\ell_{\pi_{p,p}}(X) = \ell_{\pi_p}(X)$ et $\pi_{p,p}[x_j] = \pi_p[x_j]$.

Définition 3.1.3

Soit X un espace de Banach et $1 \leq p, q < \infty$, $(x_j^*) \subset X^*$ est une suite $(p, q) -$ sommant si, et seulement si

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \ x_1, \ldots, x_n \in X \\ (\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

Remarque 3.1.4

(1) Soit X un espace de Banach et $1 \leq q \leq p < \infty$, (x_j) suite dans X. On dit que (x_j) suite $(p, q) -$ sommante si, et seulement si

$$\begin{cases} \exists C \geq 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^* \\ (\sum_{k=1}^{n} \sup_j |x_k^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x \in B_X} (\sum_{k=1}^{n} |x_k^* x|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

(2) Si $p = \infty$ (resp. $q = \infty$) on a $\ell_{\pi_{\infty,q}}(X) = \ell_\infty(X)$ (resp. $\ell_{\pi_{p,\infty}}(X) = \ell_p(X)$).

Lemme 3.1.5

Soient X *un espace de Banach,* $1 \leq q \leq p < \infty$ *et* r *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Alors, pour tous* $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, on a

$$(\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{ (\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^q)^{\frac{1}{q}},\ \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}.$$

Preuve

Pour $q = 1$ c'est juste la dualitée $\ell_p(X^*) = (\ell_{p^*}(X))^*$. Pour le cas général, soit

$$(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j x_j^* x_j| \ :\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^{q^*} = 1\right\}.$$

Notons que, $\ell_{p^*}(X) = \ell_{q^*}\ell_r(X)$. Donc,

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j x_j^* x_j| \ :\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^{q^*} = 1,\ \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}\\ = \ &\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|x_j^*\alpha_j x_j| \ :\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^{q^*} = 1,\ \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}.\end{aligned}$$

On pose $y_j = \alpha_j x_j$, donc

$$\begin{aligned}\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|x_j^*\alpha_j x_j| \ :\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^{q^*} = 1, \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\right\} &= \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|x_j^* y_j| \ :\ \sum_{j=1}^{n}\|y_j\|^{p^*} = 1\right\},\\ &= (\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\sup\left\{ (\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^q)^{\frac{1}{q}}, \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\} = (\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui démontre le lemme. ■

3.2 Propriétés

Proposition 3.2.1 [AB02]

Soient X *un espace de Banach et* $1 \leq p,q < \infty$. Si $\frac{1}{r} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})^+$, on a

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X) \subseteq \ell_r(X). \qquad (3.1)$$

Théorème 3.2.2
Soient $1 \leq p \leq q < \infty$, X *un espace de Banach. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'espace X est de dimension finie.*

(2) $\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_r(X)$, *où* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Preuve

(1) ⇒ (2)

On suppose que X est de dimension finie, donc $\ell_q(X^*) = \ell_q^w(X^*)$, voir [DJT95, p. 33].

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup\left\{(\sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x)|^q)^{\frac{1}{q}};\ \|x\|_X = 1\right\}.$$

Soit $(x_j) \in \ell_r(X)$, d'après le Lemme 3.1.5 on a

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^q)^{\frac{1}{q}} &= \sup\left\{(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}};\ \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\},\\ &= \sup\left\{(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}} :\ \|x\|_X = 1\right\},\end{aligned}$$

donc

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup\left\{(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}} :\ \|x\|_X = 1\right\}.$$

Ce qui implique $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$, et par conséquent

$$\ell_r(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X). \qquad (3.2)$$

D'après (3.1) et (3.2), on a

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_r(X).$$

(2) ⇒ (1)

On suppose que $\ell_{\pi_{p,q}}(X) = \ell_r(X)$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Donc d'après le Lemme 3.1.5 on a

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup\left\{(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}};\ \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\},$$

comme $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$, alors

$$\|x_j^*\|_{\ell_q(X^*)} \leq C\sup\left\{(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x|^q)^{\frac{1}{q}};\ x \in B_X\right\},$$
$$\leq C\|x_j^*\|_{\ell_q^w(X^*)}.$$

Donc
$$\ell_q^w(X^*) \subseteq \ell_q(X^*). \qquad (3.3)$$

On a aussi vu le Théorème 1.1.5
$$\ell_q(X^*) \subseteq \ell_q^w(X^*). \qquad (3.4)$$

D'après (3.3) et (3.4) on a
$$\ell_q^w(X^*) = \ell_q(X^*).$$

Donc X est de dimension finie. ■

Proposition 3.2.3 (Inclusion)

Soient X *un espace de Banach,* $1 \leq p_1 \leq p_2$, *et* $1 \leq q_1 \leq q_2$, $1 \leq p \leq q < \infty$. *Alors*

(1) $\ell_{\pi_{p_1,q}}(X) \subseteq \ell_{\pi_{p_2,q}}(X)$, *et* $\pi_{p_2,q}[x_j] \leq \pi_{p_1,q}[x_j]$.

(2) $\ell_{\pi_{p,q_2}}(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q_1}}(X)$, *et* $\pi_{p,q_1}[x_j] \leq \pi_{p,q_2}[x_j]$.

(3) $\ell_{\pi_p}(X) \subseteq \ell_{\pi_q}(X)$, *et* $\pi_p[x_j] \leq \pi_q[x_j]$.

Preuve

(1) Soient $1 \leq p_1 \leq p_2$ et $1 \leq q < \infty$, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p_1,q}}(X)$, on a

$$(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} \leq (\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}},$$
$$\leq \pi_{p_1,q}[x_j] \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x|^q)^{\frac{1}{q}},$$
$$\leq \pi_{p_1,q}[x_j] \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p_2,q}}(X)$ et $\pi_{p_2,q}[x_j] \leq \pi_{p_1,q}[x_j]$.

(2) Soient $1 \leq q_1 \leq q_2$ et $1 \leq p < \infty$, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q_2}}(X)$, alors

$$(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q_2}[x_j] \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}},$$
$$\leq \pi_{p,q_2}[x_j] \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}}.$$

On conclut, $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q_1}}(X)$ et $\pi_{p,q_1}[x_j] \leq \pi_{p,q_2}[x_j]$.

(3) Claire d'après le Théorème d'inclusion 1.3.6. ■

Théorème 3.2.4

Soient X *un espace de Banach;* $1 \leq p,q,r,s < \infty$ *tels que* $p \leq r$ *et* $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{s}$.

Alors, $\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X)$.

Preuve

(1) Si $1 \leq s \leq q$ on a, $\ell_s^w(X^*) \subseteq \ell_q^w(X^*)$. Si $1 \leq p \leq r$ on a, $\ell_p(X) \subseteq \ell_r(X)$. Soit $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$, alors

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{p,q}[x_j] \|x_j^*\|_{\ell_q^w(X^*)},\\ &\leq \pi_{p,q}[x_j] \|x_j^*\|_{\ell_s^w(X^*)},\end{aligned}$$

donc $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,s}}(X)$.

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{p,s}}(X). \qquad (3.5)$$

Aussi pour $1 \leq p \leq r$ et d'après la Proposition 3.2.3, on a

$$\ell_{\pi_{p,s}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X). \qquad (3.6)$$

D'après (3.5) et (3.6) on a

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X).$$

(2) Si $1 \leq q < s$ où $s = \infty$ ou $r = \infty$. D'après la Remarque 3.1.4 et la Proposition 3.2.1, on a si $s = \infty$

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subseteq \ell_{\pi_{r,\infty}}(X) = \ell_r(X).$$

D'où

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subseteq \ell_r(X).$$

Si $r = \infty$

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{\infty,s}}(X) = \ell_\infty(X).$$

D'où

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_\infty(X).$$

(3) Si $1 \leq q < s$ et $r,s < \infty$, alors

$$\begin{matrix} 1 \leq p \leq r \\ 1 \leq q < s \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 \leq \frac{r}{p} \\ 1 \leq \frac{s}{q} \end{matrix} \Rightarrow 1 \leq \frac{r}{p}, \frac{s}{q} < \infty \right\}.$$

Soit a le conjugué de $\frac{r}{p}$ et b le conjugué de $\frac{s}{q}$, alors

$$\frac{1}{a} + \frac{p}{r} = \frac{1}{b} + \frac{q}{s} = 1.$$

Pour la suite $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$ il existe $C > 0$, $\forall x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, telles que

$$(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x\right|^q)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui implique que $\pi_{p,q}[x_j] \leq C.$

Maintenant soient $\alpha_j \geq 0,$ telle que $\sum \alpha_j^q = 1.$ Alors

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x_j\right|^r)^{\frac{1}{r}} &= (\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* (\alpha_j^{\frac{1}{p}} x_j)\right|^p)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \pi_{p,q}[x_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} \left|x^* \alpha_j^{\frac{1}{p}} x_j\right|^q)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \pi_{p,q}[x_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{\frac{q}{p}} |x^* x_j|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Posons $ap \leq bq \Rightarrow a \leq \frac{bq}{p}$ donc $\sum_j^n \alpha_j^{\frac{q}{p}b} \leq 1,$ d'après l'inégalité de Hölder $\frac{q}{s} + \frac{1}{b} = 1,$ on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x_j\right|^r)^{\frac{1}{r}} &\leq \pi_{p,q}[x_j] (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{\frac{q}{p}b})^{\frac{p}{q}b} \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^s)^{\frac{1}{s}}, \\
&\leq \pi_{p,q}[x_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^s)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

On déduit que $(x_j) \in \ell_{\pi_{r,s}}(X)$ donc $\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X)$ et $\pi_{r,s}[x_j] \leq \pi_{p,q}[x_j].$ ■

Définition 3.2.5 (Trace)

Soit X un espace de Banach de dimention finie et $T : X \to X,$ opérateur linéaire de rang fini telle que $T = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \otimes x_j,$ où $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in X.$ La trace d'opérateur linéaire T est définie comme suit $tr(T) = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j^*, x_j \rangle.$

Théorème 3.2.6

Soit X un espace de Banach, $1 \leq q < \infty$ et $(x_j) \subset X$. La suite (x_j) est $(1,q)-$ sommante si, et seulement si, il existe un opérateur intégrale $T : \ell_q \to X$.

Preuve

$\Rightarrow)$

Soit (x_j) une suite $(1,q)-$ sommant, donc d'après la Proposition 3.2.1 on a $(x_j) \in \ell_{q^*}(X)$. On définit T par

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_q & \longrightarrow & X \\ e_j & \longmapsto & T(e_j) = x_j \end{array}$$

$T = \sum e_j \otimes x_j$ est un opérateur linéaire borné.

Soit $v = \sum_j x_j^* \otimes \xi_j$, $v_k = \sum_j x_j^* \otimes \xi_{jk}$, $v_j^* = \sum_j \xi_{jk} x_j^*$, $(\xi_{jk})_k \in \ell_q$. On a

$$\begin{aligned} |tr(Tv)| = \sum_k |v_k^* x_j| &\leq \pi_{1,q}[x_k] C \sup_{x \in B_X} (\sum |v_k^* x|^q)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \pi_{1,q}[x_k] \|v_k^*\|_{\ell_q^w(X^*)}, \\ &\leq \pi_{1,q}[x_j] \|v_k^*\|_{\ell_q^w(X^*)}, \\ &\leq \pi_{1,q}[x_j] \|v\|, \end{aligned}$$

donc T est un opérateur intégrale.

$\Leftarrow)$

Soit T un opérateur intégrale tel que,

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_q & \longrightarrow & X \\ e_j & \longmapsto & Te_j = x_j. \end{array}$$

Et soit $v : X^* \to \ell_q$ telle que $v = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \otimes \lambda_j e_j$ où $\lambda_j = sgn(x_j^* x_j)$, Donc,

$$\begin{aligned} Tv &= \sum_{j=1}^{n} x_j^* \otimes T(\lambda_j e_j), \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^* \otimes \lambda_j x_j. \end{aligned}$$

Ce qui imlique

$$\begin{aligned} tr(Tv) &= \sum_{j=1}^{n} \langle x_j^*, \lambda_j x_j \rangle, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_j^*, x_j \rangle, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left| \langle x_j^*, x_j \rangle \right|, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left| x_j^* x_j \right|. \end{aligned}$$

Donc d'après [DJT95, Corollaire 6.15] on aura que

$$tr(Tv) = \sum_{j=1}^{n} \left| x_j^* x_j \right| \leq \iota_1(T) \|v\|,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^* x_j \right|^1)^{\frac{1}{1}} &\leq \iota_1(T) \ \|v\|, \\ &\leq \iota_1(T) \|x_j^*\|_{\ell_q^w(X^*)}, \\ &\leq \iota_1(T) \sup_{x \in B_X} (\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^* x_j \right|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Donc $(x_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X)$ et $\pi_{1,q}[T] \leq \iota_1(T)$. ■

Proposition 3.2.7 [AB02]

Soit X *un espace de Banach, telle que* $\mathcal{L}(c_0, X^*) = \Pi_{s^*}(c_0, X^*)$ on a $\ell_{\pi_{r,s}}(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X)$. Où $1 \leq p, q, r, s, t < \infty$ avec $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$.

Preuve

On suppose que $\mathcal{L}(c_0, X^*) = \Pi_{s^*}(c_0, X^*)$ donc d'après le Lemme 1.3.8 on a $\ell_1^w(X^*) = \ell_s \ell_{s^*}^w(X^*)$. On pose $(x_j) \in \ell_{\pi_{r,s}}(X)$ et $(x_j^*) \in \ell_q^w(X^*)$, donc $(x_j^* x_j) \in \ell_p$. Soit $(\alpha_j) \in \ell_{q^*}$ alors $(\alpha_j x_j^* x_j) \in \ell_t$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{t}$, et $(\alpha_j x_j^*) \in \ell_1^w(X^*)$. Alors il existe $(\beta_j) \in \ell_{s^*}$ et $(y_j^*) \in \ell_s(X^*)$ où $\alpha_j x_j^* = \beta_j y_j^* \in \ell_s \ell_{s^*}^w(X^*)$, ce qui implique

$$\alpha_j x_j^* x_j = \beta_j y_j^* x_j \in \ell_{s^*} \ell_r = \ell_t, \quad (\frac{1}{s^*} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{t}).$$

D'où $(x_j) \in \ell_{\pi_{\alpha_1,\alpha_2}}(X)$ tel que $\frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q^*}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} &= \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} - 1 \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Donc $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$. ■

Proposition 3.2.8
Soient X *un espace de Banach, telle que* $\mathcal{L}(c_0, X^*) = \Pi_{s^*}(c_0, X^*)$ *on a* $\ell_{\pi_{r,s}}(X) = \ell_{\pi_{p,q}}(X)$.
Où $1 \leq p,q,r,s,t < \infty$ *avec* $1 \leq p \leq r$ *et* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$.
Preuve
D'après le Théorème 3.2.4 on a

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X) \subset \ell_{\pi_{r,s}}(X). \qquad (3.7)$$

D'après la Proposition 3.2.7 on a

$$\ell_{\pi_{r,s}}(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X). \qquad (3.8)$$

Alors, d'après (3.7) et (3.8) on a $\ell_{\pi_{r,s}}(X) = \ell_{\pi_{p,q}}(X)$. ■

Proposition 3.2.9 [AB02]
Soient X *un espace de Banach,* $1 \leq q \leq p < \infty$ *et* $r \geq p^*$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) Id_{X^*} *est* $(p,q)-$ *sommante et* $\pi_{p,q}(Id_{X^*}) = \sup\left\{\pi_{p,q}[x_j] : \|(x_j)\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}$.
(2) $\ell_r(X) \subseteq \ell_{\pi_{s,q}}(X)$ *pour tout* $1 \leq s \leq r$ *où* $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.
Preuve
(1) $\Rightarrow$ **(2)**
Supposons que Id_{X^*} est $(p,q)-$ sommante. Donc pour tout $x_1^*, \ldots, x_n^*$ dans X^* on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left\|Id_{X^*} x_j^*\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(Id_{X^*}) \sup_{\xi \in B_X} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\langle \xi, x_j^* \rangle\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left\|x_j^*\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(Id_{X^*}) \left\|(x_j^*)\right\|_{\ell_q^w(X^*)}. \qquad (3.9)$$

Soit $(x_j) \in B_{\ell_r(X)}$ si $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$ on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x_j\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} : \|(x_j)\|_{\ell_r^w(X)} = 1\right\}.$$

Ceci implique que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^* x_j\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|x_j^*\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (3.10)$$

et par conséquent d'après (3.9) et (3.10) on a

$$(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^* x_j\right|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\sum_{j=1}^{n}\left\|x_j^*\right\|^p)^{\frac{1}{p}},$$
$$\leq \pi_{p,q}(id_{X^*})\left\|(x_j^*)\right\|_{\ell_q^w(X^*)}.$$

D'où

$$(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^* x_j\right|^s)^{\frac{1}{s}} \leq \pi_{p,q}(id_{X^*}) \sup_{x\in B_X}(\sum\left|x_j^* x\right|^q)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.11)$$

Ce qui implique $(x_j) \in \ell_{\pi_{s,q}}(X)$ donc $\ell_r(X) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X)$ tq $1 \leq s \leq r$ et $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.
Aussi

$$\pi_{s,q}[x_j] = \inf\{\pi_{p,q}(Id_{X^*}), \text{ vérifiant } (3.11)\},$$

et

$$\pi_{p,q}(Id_{X^*}) = \sup\left\{\pi_{s,q}[x_j],\ \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)
Soit $\ell_r(X) \subseteq \ell_{\pi_{s,q}}(X)$ avec $1 \leq s \leq r$ et $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$. Soit $(x_j) \in \ell_{\pi_{s,q}}(X)$. On a

$$(\sum_{j=1}^{n}|x_j^* x_j|^s)^{\frac{1}{s}} \leq \pi_{s,q}[x_j] \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\sup\left\{(\sum_{j=1}^{n}|x_j^* x_j|^s)^{\frac{1}{s}} : \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}$$
$$\leq \sup\left\{\pi_{s,q}[x_j] : \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\} \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Aussi

$$(\sum_{j=1}^{n}\|x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup\left\{\pi_{s,q}[x_j] : \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\} \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où

$$(\sum_{j=1}^{n}\|Id_{X^*}x_j^*\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup\left\{\pi_{s,q}[x_j] : \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\} \sup_{x\in B_X}(\sum_{j=1}^{n}|x_j^* x|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui implique que Id_{X^*} est un opérateur $(p,q)-$ sommant et

$$\pi_{p,q}(Id_{X^*}) = \sup\left\{\pi_{s,q}[x_j] \, : \, \|x_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Théorème 3.2.10

Soit X *un espace de Banach, si* $q < p$ *et* $\frac{1}{s^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *on a,* $\ell_s^w(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X)$.

Preuve

Si $q < p$ on aura $\frac{1}{s^*} > 0$ donc

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} \Rightarrow \frac{1}{p^*} - \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{s^*},$$

et

$$\frac{1}{p^*} - \frac{1}{q^*} = \frac{1}{s^*} \Rightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{1}{s^*} + \frac{1}{q^*} \quad , \frac{1}{p^*} > \frac{1}{q^*}.$$

Soit $(x_j) \in X, \quad (x_j^*) \in X^*$ on a

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|\alpha_j\|_{p^*}} (\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j x_j^* x_j|).$$

Aussi si $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{s^*} + \frac{1}{q^*}$ on a

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* x_j|^p)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\sum_{j=1}^{n} |\beta_j \alpha_j x_j^* x_j|), \\ &= \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\sum_{j=1}^{n} |\langle \lambda_j x_j^*, \beta_j x_j \rangle|), \\ &= \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1} \sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1} (\left|\int_0^1 \langle \sum_j r_j(t) \lambda_j x_j^*, \sum_k r_k(t) \beta_k x_k \rangle\right|).\end{aligned}$$

D'après $[$DJT95, Proposition 11.10$]$ on a

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n}|x_j^*x_j|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1}\sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1}(\int_0^1\|\sum r_j(t)\lambda_j x_j^*\|^2 dt)(\int_0^1\|\sum r_k(t)\beta_k x_k\|^2 dt)^{\frac{1}{2}},\\
&\leq \sup_{\|\beta_j\|_{s^*}=1}\sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1}\sup_{t\in[0,1]}\left\|\sum_k r_k(t)\beta_k x_k\right\|_X\left\|\sum_j r_j(t)\lambda_j x_j^*\right\|_{X^*},\\
&\leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)}\sup_{\|\lambda_j\|_{q^*}=1}\sup_{t\in[0,1]}(\left\|\sum_k r_k(t)\lambda_k x_k^*\right\|),\\
&\leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)}\|x_j^*\|_{\ell_q^w(X^*)},\\
&\leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)}\sup_{x\in B_X}(\sum|x_j^*x|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Ceci implique que $(x_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X)$ et $\pi_{p,q}[x_j] \leq \|x_j\|_{\ell_s^w(X)}$, et par conséquent $\ell_s^w(X) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X)$. ■

Corollaire 3.2.11

Soit X *un espace de Banach,* $\ell_p^w(X) \subset \ell_{\pi_{p,1}}(X)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$.

Preuve

D'après le Théorème 3.2.10 on a

(1) Si $s = p$ et $q = 1$ on a

$$\ell_p^w(X) \subset \ell_{\pi_{p,1}}(X) \text{ tel que } p > 1 \text{ et } \pi_{p,1}[x_j] \leq \|x_j\|_{\ell_p^w(X)}.$$

(2) Si $p = 1$ on a

$$\ell_1^w(X) \subset \ell_{\pi_1}(X).$$

Ceci termine la démonstration. ■

Chapitre 4
Espaces des suites d'opérateurs $(p,q)-$ sommants

Contenu

4.1. Espaces des suites d'opérateurs linéaires $(p,q)-$ sommants
4.2. Espaces des suites d'opérateurs linéaires positivements $(p,q)-$ sommants

4.1 Espaces des suites d'opérateurs linéaires (p,q) - sommants

Cette section s'article sur [AB03].

Définition 4.1.1 [AB03]

Soient X, Y deux espaces de Banach, $E(X)$, $F(Y)$ deux espaces des suites ($E(X)$, $F(Y)$ deux espaces de Banach), $(u_j)_{1\leq j\leq n}$ suite dans $\mathcal{L}(X,Y)$. On dit que $(u_j)_{1\leq j\leq n}$ suites d'opérateurs multiplicateurs entre $E(X)$ et $F(Y)$ si

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in X \\ \left\| (u_j x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{F(Y)} \leq C \| (x_j)_{j=1}^{n} \|_{E(X)}. \end{cases}$$

On note

$$(E(X),F(Y)) = \left\{ (u_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{L}\ (X,Y), \text{ suite d'opérateurs multiplicateurs} \right\}.$$

Définition 4.1.2

Soient $1 \leq q < p < \infty$, et X, Y deux espaces de Banach, $(u_j)_j$ suites dans $\mathcal{L}(X,Y)$. On dit que (u_j) est une suite d'opérateurs $(p,q)-$ sommants (ou bien suite d'opérateurs multiplicateurs (p,q) -sommants) si

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in X \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \| u_j x_j \|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

On note

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) = \{\ (u_j) \in \mathcal{L}(X,Y), \text{ suite d'opérateurs } (p,q) - \text{sommants } \},$$

et

$$\pi_{p,q}[u_j] = \pi_{p,q}[u_j;X,Y] = \inf\{\ C, \text{ vérifiant la définition 4.1.2 } \}.$$

Notation 4.1.3

Si $p = q$ on note, $\ell_{\pi_{p,p}}(X,Y) = \ell_{\pi_p}(X,Y)$ et $\pi_{p,p}[u_j;X,Y] = \pi_p[u_j;X,Y]$.

Proposition 4.1.4

(1) *Soient* $1 \leq q < p < \infty$, X, Y *deux espaces de Banach, l'espace* $(\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y), \pi_{p,q})$ *est un espace de Banach.*

(2) *Si* $p < q$ *on a* $\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) = \{0\}$.

Remarque 4.1.5

L'inégalité

$$\|(u_jx_j)_{j=1}^n\|_{\ell_p(Y)} \leq C\|(x_j)_{j=1}^n\|_{\ell_q^w(X)}.$$

Implique que

$$(\ell_q^w(X), \ell_p(Y)) = \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y).$$

Remarque 4.1.6

Soient $1 \leq q < p < \infty$, et X, Y deux espaces de Banach.

(1) Si $p = \infty$ ou $q = \infty$ on a

$$\ell_{\pi_{\infty,q}}(X, Y) = \ell_\infty(\mathcal{L}(X, Y)) \text{ et } \ell_{\pi_{p,\infty}}(X, Y) = \ell_p(\mathcal{L}(X, Y)).$$

(2) $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$ si, et seulement si $(\lambda_j u_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X, Y)$ pour tout $(\lambda_j) \in \ell_{p^*}$ et

$$\pi_{p,q}[u_j; X, Y] = \sup\left\{\pi_{1,q}[\lambda_j u_j; X, Y]. \|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}} = 1\right\}.$$

En effet,

(1) Si $p = \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$ on a

$$\begin{aligned} \sup_j \|u_jx_j\| &\leq C \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^n |x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \infty, \end{aligned}$$

donc $(u_j) \in \ell_\infty(\mathcal{L}(X, Y))$.

Si $q = \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$ on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \|u_jx_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C \sup_j \left(\sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{j=1}^n |x^*x_j|\right), \\ &\leq \infty, \end{aligned}$$

comme ça $(u_j) \in \ell_p(\mathcal{L}(X, Y))$.

(2) $\Rightarrow)$

Soit $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y)$. Par conséquent

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u_jx_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}[u_j] \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\|\lambda_ju_jx_j\|\right); \|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}} = 1\right\} \leq \sup_{\|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}}=1} (\pi_{p,q}[\lambda_ju_j]) \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|\lambda_ju_jx_j\|\right) \leq \sup_{\|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}}=1} (\pi_{p,q}[\lambda_ju_j]) \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où,

$$(\lambda_ju_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X,Y) \text{ et } \pi_{1,q}[u_j;X,Y] = \sup\left\{\pi_{p,q}[\lambda_ju_j;X,Y],\ \|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}} = 1\right\}.$$

(2) $\Leftarrow)$

Soit $(\lambda_ju_j) \in \ell_{\pi_{1,q}}(X,Y)$. Donc

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|\lambda_ju_jx_j\|\right) \leq \pi_{1,q}[\lambda_ju_j] \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\|\lambda_ju_jx_j\|\right);\ \|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}} = 1\right\} \leq \sup_{\|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}}=1} (\pi_{1,q}[\lambda_ju_j]) \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u_jx_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}}=1} (\pi_{1,q}[\lambda_ju_j]) \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui implique

$$(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) \text{ et } \pi_{p,q}[u_j;X,Y] = \sup\left\{\pi_{1,q}[\lambda_ju_j;X,Y], \|\lambda_j\|_{\ell_{p^*}} = 1\right\}.$$

Proposition 4.1.7

Soient X, Y *deux espaces de Banach et* $1 \leq q < p \leq \infty$. *On a*

(1) $\ell_{\pi_{r,q}}(X,\mathbb{K})\widehat{\otimes}\ell_s(Y) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$.

(2) $\ell_s\widehat{\otimes}\Pi_{r,q}(X,Y) \subset \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$.

Preuve

(1) On pose $(u_j) \in \ell_{\pi_{r,q}}(X,\mathbb{K})\widehat{\otimes}\ell_s(Y)$ donc $u_j = x_j^* \otimes y_j$, où $(x_j^*) \in \ell_{\pi_{r,q}}(X,\mathbb{K})$ et $(y_j) \in \ell_s(X)$. Soit $(x_j^*) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X,\mathbb{K})$, ce qui implique

$$
\begin{array}{rccc}
(x_j^*) & : & \ell_q(X) & \longrightarrow & \ell_r(\mathbb{K}) \\
 & & (x_j) & \longmapsto & x_j^* x_j.
\end{array}
$$

Alors

$$u_j(x_j) = (x_j^* \otimes y_j)(x_j) = (\langle x_j^*, x_j \rangle) y_j = x_j^*(x_j) y_j \in \ell_p(Y) \text{ tel que } \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}.$$

Donc

$$(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y).$$

(2) On suppose que $u_j = \lambda_j u$ tel que $u \in \Pi_{r,q}(X, Y)$ et $(\lambda_j) \in \ell_s(\mathbb{K})$. Soit $(x_j) \in \ell_j^w(X)$, donc

$$u_j(x_j) = \lambda_j u(x_j) \in \ell_p(Y),\ \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}.$$

Ce qui implique

$$(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X, Y).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Théorème 4.1.8

Soient X, Y *deux espaces de Banach et* $1 < p.$ *Alors,*

$$\ell_p^s(\mathcal{L}(X, Y)) \subset \ell_{\pi_{p,1}}(X, Y).$$

Preuve

On suppose que $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $x_1, \ldots, x_n \in \ell_1^w(X)$. Alors,

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n}\|u_jx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \sup\{\left|\sum_{j=1}^{n}\langle u_jx_j, y_j^*\rangle\right| : \sum\|y_j^*\|^{p^*} = 1\},\\ &= \sup\{\left|\sum_{j=1}^{n}\langle x_j, u_j^*y_j^*\rangle\right| : \sum_{j=1}^{n}\|y_j^*\|^{p^*} = 1\},\\ &= \sup\{\int_0^1\left|\langle\sum_{j=1}^{n}x_jr_j(t), \sum_{j=1}^{n}u_j^*y_j^*r_j(t)\rangle\right|dt : \sum_{j=1}^{n}\|y_j^*\|^{p^*} = 1\},\\ &\leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)}\sup\{\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{n}u_j^*y_j^*r_j(t)\right\|dt : \sum_{j=1}^{n}\|y_j^*\|^{p^*} = 1\},\\ &\leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)}\sup\{\left|\langle\sum_{j=1}^{n}u_jy_j^*r_j(t), x\rangle\right| : \sum_{j=1}^{n}\|y_j^*\|^{p^*} = 1, \|x\| = 1, t\in[0,1]\}.\end{aligned}$$

Donc

$$(\sum_{j=1}^{n}\|u_jx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)}\sup\{\left|\sum_{j=1}^{n}\langle u_j(x)r_j(t), y_j^*\rangle\right| : \sum_{j=1}^{n}\|y_j^*\|^{p^*} = 1, \|x\| = 1, t\in[0,1]\}.$$

Soit $u_j \in \ell_p^s(\mathcal{L}(X,Y))$. Ceci implique

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{n}\|u_jx_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \|x_j\|_{\ell_1^w(X)}\sup_{\|x\|=1}(\sum_{j=1}^{n}\|u_j(x)\|^p)^{\frac{1}{p}},\\ &\leq \sup_{\|x\|=1}(\sum_{j=1}^{n}\|u_j(x)\|^p)^{\frac{1}{p}}\|x_j\|_{\ell_1^w(X)},\\ &\leq \sup_{\|x\|=1}(\sum_{j=1}^{n}\|u_j(x)\|^p)^{\frac{1}{p}}\sup_{x^*\in B_{X^*}}(\sum_{j=1}^{n}|x^*x_j|).\end{aligned}$$

Donc $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,1}}(X,Y)$. ■

Proposition 4.1.9 (Inclusion)

Soient X, Y *deux espaces de Banach, et* $1 \leq q \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $1 \leq q_1 \leq q_2 < p < \infty$ *et* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Alors,*

(1) $\ell_{\pi_{p_1,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_{p_2,q}}(X,Y)$.

(2) $\ell_{\pi_{p,q_2}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,q_1}}(X,Y)$.

(3) $\ell_{\pi_p}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_q}(X,Y)$.

(4) $\ell_{\pi_{1,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_1}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_p}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,1}}(X,Y)$.

La preuve est évidente d'après la Proposition 3.2.3.

Théorème 4.1.10

Soient X, Y *deux espaces de Banach,* $1 \leq p \leq r$ *et* $1 \leq q, s$ *et* $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{s}$. *Alors*

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_{r,s}}(X,Y).$$

Pour la démonstration, on utilise le Théorème 3.2.4.

Proposition 4.1.11

Soit X *un espace de Banach tel que* $\mathcal{L}(c_0,X) = \Pi_{S^*}(c_0,X)$. *Alors*

$$\ell_{\pi_{r,s}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y), \text{ où } 1 \leq p,q,r,s < \infty \text{ et } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}.$$

Pour tout espace de Banach Y.

La preuve est évidente d'après la Proposition 3.2.7.

On peut donner le Théorème suivant d'après le Théorème 4.1.10 et la Proposition 4.1.11.

Théorème 4.1.12

Soit X *un espace de Banach telle que* $\mathcal{L}(c_0,X) = \Pi_{s^*}(c_0,X)$. *Alors*

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) = \ell_{\pi_{r,s}}(X,Y), \text{ où } 1 \leq p,q,r,s < \infty \text{ et } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}.$$

Pour tout espace de Banach Y.

Proposition 4.1.13

Soit X *un espace de cotype* 2, Y *un espace de Banach. Alors*

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) = \ell_{\pi_{r,2}}(X,Y), \text{ où } p \leq r \text{ et } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}.$$

4.2 Espaces des suites d'opérateurs linéaires positivements $(p,q)-$ sommants

Définition 4.2.1

Soient $1 \leq q < p < \infty$ et X un espace de Banach réticulé, Y un espace de Banach. (u_j) suite dans $\mathcal{L}(X,Y)$, on dit que (u_j) suites d'opérateurs positivements $(p,q)-$ sommants si

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x_1,\ldots,x_n \geq 0 \text{ dans } X \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_j x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

On note

$$\ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y) = \{u_j : X \to Y \text{ suites d'opérateurs positivements } (p,q) - \text{sommants } \},$$

et

$$\pi^+_{p,q}[u_j] = \pi^+_{p,q}[u_j;X,Y] = \inf\{C, \text{ vérifiant la Définition 4.2.1}\}.$$

Notation 4.2.2

Si $p = q$ on a $\ell_{\pi^+_{p,p}}(X,Y) = \ell_{\pi^+_p}(X,Y)$ et $\pi^+_{p,p}[u_j;X,Y] = \pi^+_p[u_j;X,Y]$.

Proposition 4.2.3

Soient $1 \leq q < p \leq \infty$ *et* X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach.*

(1) *L'espace* $(\ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y), \pi^+_{p,q})$ *est un espace de Banach.*

(2) *Si* $p < q$ *on a* $\ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y) = \{0\}$.

Remarque 4.2.4

Soit X un espace de Banach réticulé, et Y un espace de Banach.

(1) Si $p = \infty$ ou $q = \infty$ on a $\ell_{\pi^+_{\infty,q}}(X,Y) = \ell_\infty(\mathcal{L}(X,Y))$ et $\ell_{\pi^+_{p,\infty}}(X,Y) = \ell_p(\mathcal{L}(X,Y))$.

(2) $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y)$ si, et seulement si $(\lambda_j u_j) \in \ell_{\pi^+_{1,q}}(X,Y)$ pour tout $(\lambda_j) \in \ell_{p^*}$.

Proposition 4.2.5 (Inclusion)

Soit X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach.* $1 \leq q \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ *et* $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq p < \infty, \quad 1 \leq p \leq q < \infty.$

(1) $\ell_{\pi^+_{p_1,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_{p_2,q}}(X,Y)$.

(2) $\ell_{\pi^+_{p,q_2}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_{p,q_1}}(X,Y)$.

(3) $\ell_{\pi^+_p}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_q}(X,Y)$. *En particulier* $\ell_{\pi_{1,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_1}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_p}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi_{p,1}}(X,Y)$.

Preuve

(1) Soient $1 \leq q \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p_1,q}}(X,Y)$, on a

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^n \|u_j x_j\|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}} &\leq (\sum_{j=1}^n \|u_j x_j\|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}, \\ &\leq \pi^+_{p_1,q}[u_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^* x_j|^q)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

donc, $(x_j) \in \ell_{\pi^+_{p_2,q}}(X,Y)$ et $\pi^+_{p_2,q}[u_j] \leq \pi^+_{p_1,q}[u_j]$.

(2) Soient $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq p < \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p,q_2}}(X,Y)$, alors

$$\begin{aligned}(\sum_{j=1}^n \|u_j x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^* x_j|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}, \\ &\leq C \|x_j\|_{\ell^w_{q_2}}, \\ &\leq C \|x_j\|_{\ell^w_{q_1}}.\end{aligned}$$

Ce qui implique $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p,q_1}}(X,Y)$ et $\pi^+_{p,q_1}[u_j] \leq \pi^+_{p,q_2}[u_j]$.

(3) Soient $1 \leq p \leq q < \infty$ et $(u_j) \in \ell_{\pi^+_p}(X,Y)$, $(x_j) \in \ell^w_q(X)$ et $(\lambda_j) \in \ell_r$ telle que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ d'après le Lemme 3.1.5 on a

$$(\sum_{j=1}^n \|u_j x_j\|^q)^{\frac{1}{q}} = \sup\left\{(\sum_{j=1}^n |\lambda_j u_j x_j|^p)^{\frac{1}{p}}, \ \|\lambda_j\|_{\ell_r(X)} = 1\right\},$$

donc

$$(\sum_{j=1}^n |\lambda_j u_j x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^+_p[u_j] \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{j=1}^n |x^* \lambda_j x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$$

d'après l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$), on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j u_j x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p^+[u_j]\|x_j\|_{\ell_q^w(X)}\|\lambda_j\|_{\ell_r},$$

$$\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j u_j x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \|\lambda_j\|_{\ell_r(X)}=1\right\} \leq \pi_p^+[u_j]\|x_j\|_{\ell_q^w(X)}\sup\left\{\|\lambda_j\|_{\ell_r},\ \|\lambda_j\|_{\ell_r(X)}=1\right\},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u_j x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p^+[u_j]\|x_j\|_{\ell_q^w(X)}.$$

Ce qui implique $(u_j)\in\ell_{\pi_q^+}(X,Y)$ et $\pi_q^+[u_j]\leq\pi_p^+[u_j]$.
En particulier
D'après **(2)** on a

$$\ell_{\pi_{1,q}^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_1^+}(X,Y). \qquad (4.1)$$

Et d'après **(3)** on a

$$\ell_{\pi_1^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_p^+}(X,Y). \qquad (4.2)$$

D'après **(1)** on a

$$\ell_{\pi_{p_1,q}^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_{p_2,q}^+}(X,Y). \qquad (4.3)$$

Donc d'après (4.1), (4.2) et (4.3) on a

$$\ell_{\pi_{1,q}}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_1^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_p^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_{p,1}}(X,Y). \quad \blacksquare$$

Proposition 4.2.6

Soit X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach.* $p\leq r$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.
Alors $\ell_{\pi_{p,q}^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_{r,s}^+}(X,Y)$.

Preuve

Si $1\leq s\leq q$ on a, $\ell_s^w(X)\subseteq\ell_q^w(X)$. Si $1\leq p\leq r$ on a, $\ell_p(X)\subseteq\ell_r(X)$. Soit $(u_j)\in\ell_{\pi_{p,q}^+}(X,Y)$, alors

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|u_j x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}^+[u_j]\|x_j\|_{\ell_q^w(X)},$$

$$\leq \pi_{p,q}[u_j]\|x_j\|_{\ell_s^w(X)},$$

donc $(u_j)\in\ell_{\pi_{p,s}^+}(X,Y)$.

$$\ell_{\pi_{p,q}^+}(X,Y)\subseteq\ell_{\pi_{p,s}^+}(X,Y). \qquad (4.4)$$

Aussi pour $1\leq p\leq r$ et d'après la Proposition 4.2.5, on a

$$\ell_{\pi^+_{p,s}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_{r,s}}(X,Y). \qquad (4.5)$$

D'après (4.4) et (4.5) on a

$$\ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_{r,s}}(X,Y).$$

Proposition 4.2.7

Soient X_1, X_2 *deux espaces de Banach réticulés,* Y *un espace de Banach. Si* $X_1 \subseteq X_2$ on a

$$\ell_{\pi^+_{p,q}}(X_2,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_{p,q}}(X_1,Y).$$

Preuve

On suppose que $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p,q}}(X_2,Y)$, donc

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ dans } X_2 \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_j x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X_2^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{cases}$$

Puisque $X_1 \subset X_2$, donc $B_{X_2^*} \subset B_{X_1^*}$, ce qui implique

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u_j x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X_1^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p,q}}(X_1,Y)$. ■

Proposition 4.2.8

Soit X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach et* $1 \leq q \leq p < \infty$. *Alors*

$$\ell_{\pi_{p,q}}(X,Y) \subseteq \ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y).$$

Preuve

On suppose que $(u_j) \in \ell_{\pi_{p,q}}(X,Y)$ et $(x_j) \geq 0$ dans X

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u_j x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x^* x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $(u_j) \in \ell_{\pi^+_{p,q}}(X,Y)$. ■

J. L. ARREGUI ET O. BLASCO, $(p,q)-$ *summing sequences.* J. Math. Anal. Appl. **247** (2002), 812-827.

J. L. ARREGUI ET O. BLASCO, $(p,q)-$ *summing sequences of operators.* Quaestiones Mathematicae, **26** (4) (2003), 441-452.

H. APIOLA, *Duality between spaces of* $p-$ *sommables sequences,* $(p,q)-$ *somming opérateurs and caracterizatins of nuclearity.* Math. Ann. **219** (1976), 53-64.

O. BLASCO, *A class of operators from a Banach lattice into a Banach space*. Collect. Math. **37** (1986), 13-22.

J. S. COHEN, *Absolutely* $p-$ *summing,* $p-$ *nuclear operators and their conjugates*. Math. Ann. **201** (1973), 177-200.

J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, 1995.

J. L. KRIVINE, *Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés*. Séminaire Maurey Schwartz 1973-1974, exposés **22** et **23**, Ecole Polytechnique, Paris.

J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces*, *I and II*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

B. MAUREY, *Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionelles.* Seminarie Maurey -Schwartz 1973-74.

A. PIETSCH, *Absolut p-summierende in Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. **28** (1967), 333-353.

A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals (designsof a theory)*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leibzig), Teubner-Texte, (1983), 185-199.

G. PISIER, *Un théoréme sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se Factorisent par un espace de Hilbert.* Ann. Scien. De L'E.N.S. (1980), 23-43.

P. WOJTASZCZYK, *Banach spaces for analysis*. Campridge University Press, 1991.

Résumé

Dans ce mémoire, on essaie de présenter la notion mathématique des suites d'opérateurs (p,q)-sommants à celle d'opérateurs linéaires. Aussi l'étude de quelques propriétés relatives aux opérateurs linéaires.

Mots clés

Espace de Banach réticulé, opérateurs p-intégrales, opérateurs (p,q)-sommants, suites d’opérateurs (p,q)-sommants.

Abstract

In this memory, we try to present the mathematical notion of (p, q)-summing sequences of operators are in that of linear operators. Also the study of some properties related to linear operators.

Key words

Banach lattice, p-integral operator, (p,q)-summing operateur, (p,q)-summing sequences of operators.

الملخص:

في هذه المذكرة نحاول أن نبين الفكرة الرياضية في السلاسل (p,q) جمعية وهذا يظهر في المؤثرات الخطية، كذلك دراسة بعض الخواص المرتبطة بهذه المؤثرات.

الكلمات المفتاحية :

الفضاء المرتب ، المؤثرات p – التكاملية ، المؤثرات (p ,q) – جمعية ، سلاسل المؤثرات (p ,q) – جمعية .