N° d'ordre : ....

UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
Département de mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Par :

Rachid LAMRI

SUJET

RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLE DE TYPE VOLTERRA

Soutenu publiquement le 15 /01/2013

devant le jury composé de :

Abdelkader GASMI	Prof	Université de M'SILA	Président
Mostefa NADIR	Prof	Université de M'SILA	Rapporteur
Abdelkrim MERZOUGUI	MC(A)	Université de M'SILA	Examinateur
Merouani ABDELBAKI	MC(A)	Université de BBA	Examinateur
Azedine RAHMOUNE	MC(B)	Université de BBA	Examinateur

Promotion : 2009 /2010 .

RESUME

Dans ce travail nous proposons des méthode de résolution numérique des équations intégro-differentielle, en particulier celles de Volterra . L'idée principale de cette construction est la approximation du noyau continu ou faiblement continu de l'équation par un noyau de rang fini qui permet d'obtenir la solution sous forme discrétisée , ainsi pour voir la performance et l'efficacité de cette méthode, nous allons contribuer à l'étude du comportement de l'erreur face à des problèmes différents.

Mots clés : Equation intégro-differentielle, équation de Volterra, méthode de qudrature, methode de collocation, solution analytique

,

ABSTRACT

In this work, we develop method, for solving integro-defferential equations, in particular, Volterra integrao-defferential equations , the simple idea in this approach is these methods rest on an approximation of the continuous or weakly continuous kernel by a kernel of finished rank, that allow to get the solution in discrete we also present numerical examples which show the performance and efficiency of this method in some cases

Keywords: Integro-defferential equations, Volterra equations, quadrature method, collocation method, analytical solution

Remerciements

Premièrement et particulièrement, je tiens à remercier vivement mon promoteur M. NADIR.MOSTEFA pour sa guidance et son soutient indéfectible durant la préparation de ce projet, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Aussi je tiens à remercier par l'occasion qui m'est offerte, l'enseignant GUAGUI. B, pour son encouragement et son aide fidèle. Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.Finalement, je tiens à remercier mes parents pour leur soutient exemplaire et leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir

.

Dédicace.

A mes parents et mes frêres

et ma petite famille **Haithem**

Table des matières

0.1 Introduction

Une équation intégro-différentielle est une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue paraît sous le signe d'intégrale , paraissent leurs dérivées. Nous allons examiner les solutions des équations intégro-différentielles avec des méthodes appelée les méthodes de quadrature et de collocation , ces méthodes se base sur l'approximation d'une fonction inconnue $u(t)$ et le noyaux $k(x,t)$. Notre présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique , le but est de trouver la solution numérique des (E.I.D) de Volterra , ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres.

- *Le premier chapitre :*

Aborde des notions et résultats préliminaires sur quelques définitions, et rappel sur les équations intégrales ainsi des méthodes numériques des résolution des équations intégrales de Volterra de 2eme espèce, nous intéressons aux méthodes de quadrature et collocation.

- *Dans le deuxième chapitre :*

Nous donnons une introduction sur les (E-I-D) ainsi classification , et des théorèmes assurent que l'équation intégro-différentielle admette un solution unique . il est consacré aux méthodes donnés exactes solution des (E.I-D) de Volterra, nous intéressons sur la méthode de la série de solution, et la méthode de décomposition, ainsi que méthode de conversion une (E.I-D) de Volterra à une (E.I) de Volterra .

- *Le troisième chapitre* :

On ne peut pas résoudre tous les types de l'(E.I-D) de Volterra avec les méthodes analytiques , alors on a besoins de chercher d'autre méthodes de résolution numériques , en se basant sur la méthode de collocation. telle que les solutions approchées sont données sous forme de polynôme de Bessel à la fois et sous la forme de polynôme de Taylor d'autre fois , ainsi on va voir méthode de quadrature notamment la méthode des différences finies , en estimant les erreurs pour ces méthodes de comparer les solutions approchées avec la solution exacte par programmation en matlab.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notions fondamentales et définitions :

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C[a;b]$ des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle = \int_a^b u(x)\,v(x)dx\ ,$$

et de la norme de convergence uniforme :

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in[a;b]} |u(x)|$$

1.1.1 Opérateur intégral linéaire :

Soit $K : C[a;b]\times C[a;b] \to R$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur $C[a;b]$ est défini par la formule suivante :

$$A : u \in C[a;b] \to Au \in C[a;b]$$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy$$

Dans ce contexte la fonction K s'appelle noyau de l'opérateur intégral A.

1.1.2 Opérateur adjoint :

On dit que deux opérateurs $A : C[a;b] \to C[a;b]$ et $B : C[a;b] \to C[a;b]$ sont adjoints s'ils vérifient

$$\forall \ \langle u,v\rangle \in C[a;b]^2 : \langle Au,v\rangle = \langle u,Bv\rangle$$

et on note l'adjoint de A par A^*.

1.1.3 Opérateur compact :

Soient E et F deux espaces normé, A un opérateur linéaire de E dans F, on dit que A est un opérateur compact si l'image de la boule unité $B(0,1)$ de E (par A) est relativement compacte dans F, i.e. si est compacte.

Autrement dit, A est compact si pour toute suite (u_n) de $B(0,1)$ et de E, on peut extraire une sous suite (u_{nk}) que transforme A en une suite convergente $(A(u_{nk}))$ dans F

Théorème 1.1.1
L'opérateur intégral défini en (1.1.1) est compact sur $(C[a;b], \|.\|_\infty)$.

Preuve. Désignons par B la boule unité de $C[a;b]$, pour monter que notre opérateur est compact on s'inspire du théorème d'Ascoli, il suffit d'établir que
- $H = A(B)$ est équicontinu.
- pour tout $x \in C[a;b]$ l'ensemble $H_x = \{u(x) : u \in H\}$
On remarque en premier que K est uniformément continue sur $[a;b] \times [a;b]$. Pour tout u de B et tout x, x'de$[a;b]$ on écrit

$$\left|Au(x) - Au(x')\right| = \left|\int_a^b (K(x,y) - K(x',y))u(y)\,dy\right|$$

$$\leq \left|\int_a^b (K(x,y) - K(x',y))\right| |u(y)|\,dy$$

$$\leq \|u\|_\infty \left|\int_a^b (K(x,y) - K(x',y))dy\right|$$

$$\leq \left| \int_a^b (K(x,y) - K(x^{'},y))\ dy \right|$$

La continuité uniforme de K sur$[a;b] \times [a;b]$ permet d'associé à tout réel $\varepsilon > 0$ et autre réel $\alpha > 0$ de sorte que

$$\left| x - x^{'} \right| \leq \alpha \Rightarrow \left| K(x,y) - K(x^{'},y)\ \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

donc

$$\left| x - x^{'} \right| \leq \alpha \Rightarrow \left| Au(x) - Au(x^{'}) \right| \leq \varepsilon, \forall\ u \in B$$

ce qui signifie que H est équicontinu. Passons à la seconde condition.

Pour que l'ensemble $H_x = \{g(x) = Au(x) : u \in B\}$

soit relativement compact, il suffit qu'il soit borné calculons à cet effet

$$|Au(x)| = |g(x)| = \left| \int_a^b K(x,y) u\,(y)\ dy \right| \leq \|u\| \int_a^b \sup_{x,y \in [a;b]} |K(x,y)|\, dy \leq (b-a)M$$

$M = \sup_{x,y \in [a;b]} |K(x,y)|$. Il apparaît ainsi que H_x est borné, ce qui achève la démonstration

■

1.2 Introduction et classification aux des équations intégrales

Définition 1.2.1

Toute équation fonctionnelle

$$\lambda u(x) + f(x) = \int_E (K(x,y,u)dy\ ;x \in E$$

est appelée équation intégrale (EI) *ou* u *est l'inconnue,*f *est une fonction donnée et* $\lambda \in R$ *ou* $\mathbb{C}$ *,* E *est un ensemble fermé borné et mesurable d'un espace euclidien ,* K *est le noyau*

1.2.1 Classification des équations intégrales

Il y a deux types d'équations intégrales de Fredholm telles que la région d'intégration est finie et l'équation intégrale de Volterra telle que la région d'intégral est variable

Equation intégrale de Volterra

Soient $I = [a; b]$ un intervalle borné et fermé de R .

L'équation intégrale de Volterra (EIV) pour la fonction inconnu est de la forme

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x (K(x, y, u(y))dy$$

$$\varphi, u, f : x \in I \to R$$

$$K : X \times R \to R$$

la fonction φ détermine la classification de l'EIV

EIV est de premier espèce : si $\varphi(x) = 0$ l'équation precident dévient

$$f(x) = -\lambda \int_a^x (K(x, y, u(y))dy \; ; \; x \in I$$

EIV est de seconde espèce :

si est une fonction continue qui possède un nombre fini de zéros dans l'intervalle $I = [a, b]$

Une EIV est dite linéaire si son noyau a la forme

$$K(x, y, u) \; = K(x, y)u$$

Sinon elle est dite non linéaire

De type convolution si

$$K(x, y, u) \; = K(x - y, u)$$

1.2.2 Liaison entre l'équation différentielle linéaire et l'EIV

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} \; + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ...a_n(x)y = F(x)$$

A coefficients continus $a_i(x)$,$i = 1; 2......n$ avec Les conditions initiales

$$y(0) = c_0; y^{'}(0) = c_1; ....y^{^{n-1}}(0) = c_{n-1}$$

Peut être ramenée a la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce en mutant au titre d'exemple l'équation EIV comme suit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$$

$$y(0) = c_0; y^{'}(0) = c_1$$

Posons

$$u(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

D'où vu les conditions initiales on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x u(y)dy \ + c_1$$

$$y = \int_0^x u(y)dy \ + c_1(x) + c_0$$

Nous avons utilisé la formule

$$\int_a^x dy \int_a^x dy........ \int_a^x f(y)dy = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y,)^{n-1} f(y)dy$$

Compte tenu de les rolations précident mettons l'équation différentielle sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (I-A)^{-1} f$$

ou

$$u(x)+\int_a^x (a_2(x)(x-y)+a_1(x))u(y)dy+\int_a^x a_2(x)(x-y)u(y)dy = F(x)-c_1a_1(x)-c_1a_2(x)-c_0a_2(x)$$

Posons

$$K(x,y) \ = -\left[a_2(x)(x-y) + a_1(x)\right]$$

$$f(x) = F(x) - c_1a_1(x) - c_1a_2(x) - c_0a_2(x)$$

Nous ramenons l'équation a la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

i.e. : nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce

1.2.3 Existence et l'unicité de la solution

- Contraction de l'opérateur :

Soit l'opérateur intégral de second ordre

$$u - Au = f$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de 'Neumann' pourvu que l'opérateur A soit une contraction $\|A\| \leq 1$

Théorème 1.2.1

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach. X dans lui même avec $\|A\| \leq 1$ et soit l'opérateur identique dans X alors $I - A$ admet un opérateur borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$(I - A)^{-1} \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Approximation successive :

Il est a remarquer que la somme partielle

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f$$

De la série de Neumann vérifie l'équation

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

Théorème 1.2.2

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach dans lui-même avec $\|A\| \leq 1$ et soit l'opérateur I l'opérateur identique dans X alors pour tout $f \in X$. L'approximation successive

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

Avec u_0 un vecteur arbitraire de X converge vers une unique solution de l'équation

$$u - Au = f$$

Preuve.

Il est a remarquer que

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = A^n f + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f = A^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (I - A)^{-1} f$$

■

Corollaire 1.2.1

Soit K un noyau continu vérifiant la relation max

$$\max \int_G |K(x,y)|\, dy \leq 1$$

Alors pour tout $f \in X$ l'équation intégrale de seconde espèce

$$u(x) - \int_G K(x,y)u(y)dy = f\ (x)$$

admette une solution unique $u \in C(G\ )$ de plus l'approximation successive

$$u_{n+1}(x) = \int_G K(x,y)u_n(y)dy + f(x)$$

Converge uniformément vers la solution u pour tout vecteur arbitraire u_0 de $C(G\ )$.

Théorème 1.2.3

Soit A un opérateur compacte d'une espace normé X dans lui-même alors pour que l'équation non homogène

$$Tu = u - Au = f$$

admette une solution unique $u \in X$ pour tout $f \in X$ il suffit que l'équation homogène

$$Tu = u - Au = 0$$

admette la solution triviale

$$u = 0$$

Preuve.

en effet, supposons que l'équation

$$u - Au = f$$

admette une solution pour tout $f \in X$ alors veut dire que l'opérateur T est surjectif et le nombre de Riesz est nul ■

Théorème 1.2.4 *(alternative de Fredholm)*

Soit A un opérateur compact défini sur un espace de Hilbert X a valeurs dans X et soit l'équation

$$u - Au = f \tag{1.1}$$

et sont adjoint

$$v - A^{*}v = g \tag{1.2}$$

Alors l'équation (1.1) *et* (1.2) *admettent la solution unique pour tout second nombre si l'équation homogène*

$$u - Au = 0$$

$$v - A^{*}v = 0$$

Possède uniquement les solutions triviale $u = 0$ et $v = 0$.

Ou bien les équations homogènes Possède le même nombre fini des solutions linéairement indépendantes $u_1, u_2, ...u_n$ et $v_1; v_2; ....v_n$ respectivement et les équations (1.1) *et* (1.2) *sont solvable si seulement si on a*

$$\langle f, v_k \rangle = \ 0$$

$$\langle g, u_k \rangle = 0, \ \forall k = 1, 2......n$$

La solution générale de (1.1) et donné par

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k$$

Celle de l'équation (1.2)

$$v = v_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$$

Ou v_0, u_0 sont des solutions particulière quelconques des équations (1.1) et (1.2) respectivement,

$\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ des constants arbitraires

1.3 Résolution Numérique des équations intégrales de Volterra :

1.3.1 Méthode des trapèzes

Rappelons que l'équation intégrale de Volterra, est donnée par

$$u(x) = g(x) + \int_a^x K(x,y)u(y)dy \tag{1.3}$$

Notre objectif est d'approximer la solution u^* de cette équation sur un système de nœuds $x_0 = a \leq x_1 \leq .... \leq x_j \leq x_n = b$, supposons que ce système est équidistant i.e.$x_j = a + jh$, $j = 1.2 \ldots\ldots n$ où h est le pas de la discrétisation voulue , pour se faire en exigeant que l'égalité (1.3) ait lieu uniquement en ces noeuds , donc l'équation (1.3) devient

$$u(x_j) = g(x_j) + \int_a^x K(x_j,y)u(y)dy \tag{1.4}$$

La méthode des trapèzes, est usuelle dans le but d'approcher numériquement la quantité qui se présente sous forme intégrale dans cette équation, ceci nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration y.

Si en pose $y = (\ x_j)_{0 \leq i \leq j}$, il vient :

$$u(x_j) = g(x_j) + \left[\frac{h}{2}K(x_j,y_0)u(y_0) + h\sum_{i=0}^{j-1} K(x_j,y_i)u(y_i) + \frac{h}{2}K(x_j,y_j)u(y_j)\right]$$

avec les notations $u(x_j) = u_j$, $g(x_j) = g_j, K(x_j,y_i) = K_{ji}$ cette formule s'écrit :

$$u_j = g_j + \left[\frac{h}{2}K_{j0}y_0 + h\sum_{i=0}^{j-1} K_{ji}u_i + \frac{h}{2}K_{jj}u_j\right]$$

En général

$$u_j(1 - \frac{h}{2}K_{jj}) = g_j + \left[\frac{h}{2}K_{j0}y_0 + h\sum_{i=0}^{j-1} K_{ji}u_i\right] \tag{1.5}$$

Il résulte immédiatement de l'équation (1.4), pour $j = 0$ la valeur de $(a) = g(a)$, d'où

$$u_0 = g_0 \tag{1.6}$$

Cette discrétisation nous à fournie alors un système d'équations algébriques linéaires, de la forme : $Au = b$, où A est une matrice triangulaire inférieur

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . \; . & 0 \\ -\frac{h}{2}K_{10} & 1-\frac{h}{2}K_{11} & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ -\frac{h}{2}K_{1n} & . & . \; . & 1-\frac{h}{2}K_{nn} \end{bmatrix}$$

$u = (u_0, u_1, u_2, ...u_n)^t, b = (g_0, g_1, ...g_n)^t$

pour la solubilité du système (1.5), un rôle essentiel revient au déterminant de la matrice A ; étudient alors le comportement de ce dernier.

Cette matrice, elle a pour déterminant

$$D = (1-\frac{h}{2}K_{11})(1-\frac{h}{2}K_{22})...........(1-\frac{h}{2}K_{nn})$$

soit $M = \max_{1\leq j\leq n} |K_{jj}|$Il en résulte évidement

$$D \geq (1-\frac{h}{2}M)^n = (1-\frac{b-a}{2n}M)^n = (1-\frac{h}{2}M)^{\frac{b-a}{h}}$$

le second membre de cette inégalité est non nul pour tout h suffisamment petit, il en croit avec la diminution de h. Ainsi,$(1-\frac{h}{2}M)$ est pour h deux fois moindre

$$(1-\frac{h}{4}M)^2 = 1-\frac{h}{2}M+\frac{h^2}{16}M^2$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, le second membre de (1.6) tend vers $e^{-(b-a)\frac{M}{2}}$

Algébriquement dit, le déterminant du système (1.5) est non nul et ne tend pas vers 0 avec h ,

ce qui prouve justement l'absence des valeurs propres de l'équation de Volterra.

1.3.2 Méthode adaptative

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus précise , pour ce faire et sans perdre lien avec les résultats obtenus par la méthode précédente, dans chaque étape j, qui correspond à une solution , on applique la même subdivision que la première méthode sur l'intervalle $[x_0, x_{j-1}]$ sauf sur le dernier sous intervalle ($[x_{j-1}, x_j]$), il intervient un nouveau nœud intermédiaire $x_{j-\frac{1}{2}}$ en fait cette méthode est plus fin que la première méthode.

Soit

$$u_j^f = g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x_i, y)u(y)dy + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} K(x_j, y)u(y)dy + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} K(x_j, y)u(y)dy$$

Utilisons la méthode des trapèzes,

$$u_j^f = g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2}(K_{ji+1}u_{i+1} + K_{ji}u_i)h + \frac{1}{2}(K_{jj-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}} + K_{jj-1}u_{j-1})\frac{h}{2} + \frac{1}{2}(K_{jj}u_j + K_{jj-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}})\frac{h}{2} \tag{1.7}$$

$$u_j^f = g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{h}{2}K_{ji}u_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{2}K_{ji}u_i + \frac{1}{2}(K_{jj-1}u_{j-1} + K_{ji}u_i + 2K_{jj-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}})\frac{h}{2}$$

$$u_j^f(1 - \frac{1}{4}hK_{jj}) = g_j + \frac{1}{2}hK_{j0}u_0 + \sum_{i=1}^{j-2} hK_{ji}u_i + \frac{3}{4}hK_{jj-1}u_{j-1} + K_{ji}u_j + \frac{1}{2}K_{jj-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}$$

de la même manière en détermine la valeur de $u_{j-\frac{1}{2}}$

$$u_{j-\frac{1}{2}} = g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_{j-\frac{1}{2}}, y)u(y)dy + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} K(x_{j-\frac{1}{2}}, y)u(y)dy + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} K(x_j, y)u(y)dy$$

Utilisons la méthode des trapèzes

$$u_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2}(K_{j-\frac{1}{2}i+1}u_{i+1} + K_{j-\frac{1}{2}i}u_i)h + \frac{1}{2}(K_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}} + K_{j-\frac{1}{2}j-1}u_{j-1})\frac{h}{2}$$

$$u_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2}hK_{j-\frac{1}{2}i}u_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2}hK_{j-\frac{1}{2}i}u_i + \frac{1}{4}(K_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}} + K_{j-\frac{1}{2}j-1}u_{j-1})h \tag{1.8}$$

$$u_{2j}(1 - \frac{h}{3}\left[K_{2j2i-1}, K_{2j2i}\right]) = g_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{3}\left[K_{2j0}, 2K_{2j1}\right] + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{j}\left[2K_{2j2i-1} + K_{2j2j} + 2K_{2j2i+1}\right]u_{2j}$$

En substituant (1.7) dans (1.8), on obtient la valeur de

Chapitre 2

Les équations Intégro-différentielles

Dans le début des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène d'augmentation de la population, et les nouveaux types d'équations ont été développés et appelés les équations intégro-différentielles. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue $u(x)$ paraît comme la combinaison du dérivé ordinaire et sous le signe intégrant. Dans les problèmes électriques de l'engineering, le courant je(t) coule dans un circuit fermé peut être obtenu dans la forme de l'équation intégro-différentielle suivante:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} I(t)dt = f(t) \tag{2.1}$$

$$I(0) = I_0$$

où L est l'inductance, R la résistance, C la capacité, et $f(t)$ la tension appliquée. Les exemples semblables peuvent être cités comme suit

$$u^{"}(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} (x-t)u(t)dt \tag{2.2}$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 1$$

Exemple 2.0.1

$$u^{'}(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{1} (xt)u(t)dt \tag{2.3}$$

$$u(0) = 1$$

Les équations (2.1) et (2.2) sont des équations intégro-différentielles,de type Volterra, alors que l'équation (2.3) est une équation intégro-différentielle de type Fredholm. Ces terminologies ont été conclues à cause de la présence d'intégrales définies et indéfinies

2.1 Types d'équations intégro-différentielles

2.1.1 Equation intégro-différentielle de Fredholm

On appelle équation intégro-différentielle de Fredholm une équation du type

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_{0}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue et $a; b$ constants.

Equations intégro-différentielle de Volterra

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra une équation du type

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_{0}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue et $a; b$ constants .

Equations intégro-différentielles linéaires de Volterra-Fredholm

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm une équation du type

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_{0}^{x} K_1(x,t)u(t)dt + \int_{0}^{b} K_2(x,t)u(t)dt$$

2.2 Les équations intégro-différentielles de Volterra

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned} u\prime(t) &= f(t,u(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s,u(s))ds, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

Où $t_0 \geq 0$ et $du(t)/d(t) = u\prime(t)$. la théorie développée est proche dans l'esprit de celle des équations différentielles ordinaires classiques. Il présente les caractéristiques communes de la théorie de l'existence et met également en lumière certains problèmes là où il y a des différences.

2.2.1 Existence locale et globale

Cette section consacrée à l'étude du (EIV) pour les équations intégro - différentiels de type volterra

$$u\prime(t) = f(t,u(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s,u(s))ds, u(t_0) = u_0, u\prime = du/dt, \tag{2.4}$$

ou $f \in C[J \times R^n, R^n], K \in C[J \times J \times R^n, R^n]$et $J = [t_0, t_0 + \alpha]$.Il est facile de montrer que l'EIV (2.4) est équivalente à l'équation intégrale

$$u(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [f(s,u(t)) + \int\limits_{s}^{t} K(r,s,u(s))dr]ds \tag{2.5}$$

Qui peut être vu par intégration (2.4) de t_0 à t, et de changer l'ordre d'intégration. Comme f et K sont continues , sur la différenciation (2.5), on obtient (2.4). Commençons par prouver le résultat d'existence locale suivante en appliquant le théorème du point fixe de Schauder, que nous énonçons ici .

Théorème 2.2.1 *(Schauder)*
Si E est un borné, sous-ensemble convexe fermé dans un espace de Banach B et $T : E \to E$ est complètement continue alors T a un point fixe.

Théorème 2.2.2

Supposons que $f \in C[J \times R^n, R^n], K \in C[J \times J \times R^n, R^n]$ *et* $\int_s^t K(r,s,u(s))dr \leq N$,
pour $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$, $u \in H = \{\emptyset \in C[J, R^n] : \emptyset(t_0) = u_0$ *et* $|\emptyset(t) - u_0| \leq b\}$.
pour certains $0 < \alpha \leq a$.

Preuve.

Considérons l'ensemble $D = \{(t,x) : t \in J \text{ et } |x - x_0| \leq b\}$ et soit $|f(t,x)| \leq M$ sur D. choisir $\alpha = min[a, b/M = N]$ et soit $H_0 = \{\emptyset \in C[J_0, R^n]\} : \emptyset(t_0) = x_0$ et $|\emptyset - x_0|_0 \leq b$ où $|\emptyset|_0 = max_{(t_0 \leq t \leq t_0+\alpha)} |\emptyset(t)|$ et $J_0 = [t_0, t_0 + \alpha]$ il est claire que H_0 est fermé, convexe et borné. pour toute $\emptyset \in H_0$, définir la fonction $T\emptyset$ par

$$T\emptyset(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, \emptyset(t)) + \int_{s}^{t} K(r,s,\emptyset(s))dr]ds, \qquad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Nous pouvons appliq

uer le théorème du point fixe de Schauder pour prouver l'existence d'un point fixe T en H_0, ce qui équivaut à la résolution du EIV (2.4) . il est claire que $T\emptyset(t_0) = x_0$, et pour $t \in J_0$

$$\begin{aligned} |T\emptyset(t) + x_{\cdot 0}| &\leq \int_{t_0}^{t} [|f(s,\emptyset(s))| + \int_{s}^{t} |K(r,s,\emptyset(s))|dr]ds \\ &\leq (M+N)\alpha \leq b, \end{aligned}$$

Ce qui implique que $TH_0 \subset H_0$. En outre,pour tout $t_1, t_2 \in J_0$, de telle sorte que $t_1 > t_2$ en modifiant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} |T\emptyset(t_2) - T\emptyset(t_1)| &\leq \int_{t_0}^{t} [|f(s,\emptyset(s))| + \int_{s}^{t} |K(r,s,\emptyset(s))|dr]ds \\ &\leq (M+N)\,|t_2 - t_1| \end{aligned}$$

Cela montre que l'ensemble $T(H_0)$ est une famille équicontinue, et par conséquent
La fermeture de $T(H_0)$ est compacte. pour toute $\emptyset, W$ a H_0, il s'ensuit, en utilisant la

Continuité uniforme de f et k, pour tout $e > 0$ il existe $Q > 0$ de telle sorte que

$$\begin{aligned} |T\emptyset(t) - TW(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} [|f(s,\emptyset(s)) - f(s,W(s))| \\ &\quad + \int_{s}^{t} |K(r,s,\emptyset(s)) - K(r,s,W(s))|dr]ds \\ &\leq e(\alpha + \alpha^2/(1/2)) \\ \text{pour tout} \quad t &\in J_0 \end{aligned}$$

à condition que $|\emptyset(s) - W(s)| < Q$ pour tous $\in J_0$. Cela implique que T est une application continue. Par le théorème du point fixe de Schauder, il est un point fixe de T dans H_0 ce achève la démonstration. ■

Parfois, il faut considérer EIV d'équations intégro-différentielles de la forme

$$\begin{aligned} u\prime &= f(t,u,Ku) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$(Ku)(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds, K(t,s)$$

$K(t,s)$ est un $n \times n$ matrice continue sur $J \times J$, et $f \in C[J \times R^n \times R^n, R^n]$ Un résultat local de l'existence de l'EIV (2.6) peut être prouvé en utilisant des arguments similaires ou *Théorème de (Schauder).* nous affirmons qu'un tel résultat.

Théorème 2.2.3

Supposons que

$$\begin{aligned} |K(t,s)| &\leq K(t,s) \in J \times J \ \mathit{et} \ |f(t,x,y)| \leq M \\ \mathit{pour} \ t &\in J \end{aligned}$$

$x, y \in H = \{x \in R^n : |x - x_0| \leq b\}$ Alors il existe une solution $u(t)$ de (2.6) sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ pour certains $\alpha > 0$.

Nous allons maintenant discuter un résultat global de l'existence d'EIV (2.4) en utilisantl a *théorème de Tychonoff* du point fixe, qui nous allons discuter .

Théorème 2.2.4 *(Tychonoff)*

Soit B un espace complet, localement convexe,et linéaire et $B(0)$ un sous-ensemble convexe fermé de B. soit la cartographie T ■ $B \to B$ continu et $T(B_0) \subset B_0$. Si la fermeture de $T(B_0)$ est compact alors T a un point fixe dans B_0.

Théorème 2.2.5

Supposons que

(i) $f \in C[R_+ \times R^n, R^n]$, $g \in C[R_+^2, R_+]$, $g(t,z)$ est monotone non décroissante dans u pour chaque $T \in J$ et

$$|f(t,x)| \leq g(t,|x|), (t,x) \in R_+ \times R^n;$$

(ii) $K \in C[R_+^2 \times R^n, R^n]$, $G \in C[R_+^3, R_+]$, $G(t,s,z)$ est monotone non décroissante dans u pour chaque $(t,s) \in R_+^2$ et

$$|K(t,s,x)| \leq G(t,s,|x|), (t,s,x) \in R_+^2 \times R^n;$$

(iii) pour chaque $z_0 > 0$, l'équation intégro-différentielle scalaire

$$\begin{aligned} z\prime(t) &= g(t,z(t)) + \int_{t_0}^{t} G(t,s,z(s))ds, \\ z(t_0) &= z_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

a une solution existant $u(t)$ pour $t \geq t_0$,

(iv)

$$\int_s^t |K(r,s,u(s))|dr \leq N \qquad \text{pour} \qquad t,s \in R_+, u \in C[R_+, R^n]$$

Ensuite, pour chaque $u_0 \in R^n$ de telle sorte que $|u_0| \leq z_0$, il existe une solution $u(t)$ de (2.4) pour $t \geq t_0$ satisfaisant $|u(t)| \leq z(t), t \geq t_0$.

Preuve.

Considérons le réel vecteur de l'espace B de toutes les fonctions continues de $[t0, \infty)$ dans R^n la topologie sur B étant celle induite par la famille de pseudo-normes $\{V_n(x)\}_n^\infty = 1$ où donc $x \in B$, $V_n(x) = sup_{(t_0 \leq t \leq n)} |u(t)|$.
Un système fondamental de voisinages est alors donnée par $\{S_n\}_n^\infty = 1$, ou $S_n = \{x \in B : V_n(x) \leq 1\}$. En vertu de cette topologie, B est un espace linéaire complet, localement convexe. on définir un B_0 sous-ensemble de B comme suit:

$$B_0 = \{x \in B : |u(t)| \leq z(t), t \geq t_0\}$$

Où $u(t)$ est une solution de (2.7) existant pour $t \geq t_0$. Il est clair que dans la topologie de B, B_0 est fermé convexe et borné. Considérons l'opérateur intégrale définie par

$$Tu(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, u(t)) + \int_{s}^{t} K(r, s, u(s))dr]ds$$

Dont le point fixe correspond à une solution de (2.4). Bien entendu, l'opérateur T est compact dans la topologie de B, et donc la fermeture de $T(B_0)$. est compact en vu de la borne de B_0. Maintenant, pour prouver $T(B_0) \subset B_0$, observe que, pour tout $x \in B_0$,

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq |u_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, u(t))|ds + \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} |K(r, s, u(s))|drds \\ &\leq |u_0| + \int_{t_0}^{t} g(s, |u(t)|)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} G(r, s, |u(s)|)drds \\ &\leq z_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, z(s))ds + \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} G(r, s, z(s))drds = z(t), \end{aligned}$$

Utilisation de la monotonie de g et G, la définition de B_0, et le fait $z(t)$ est une solution de (2.7). Donc $|Tu(t)| \leq z(t)$,ce qui implique $T(B_0) \subset B_0$. Ainsi par le théorème du point fixe de Tychonoff, T a un point fixe dans B_0 , dont achève la démonstration du théorème. ■

Si, au lieu de la forme (2.4) une équation intégro-différentielle est du type

$$u\prime(t) = f(t, u(t)) + \int_{0}^{t} K(t, s, u(s))ds, t \in R^+ \tag{2.8}$$

Ensuite, il est parfois pratique de spécifier une première $\emptyset_0(t)$ sur l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$, $t_0 \geq 0$ à savoir

$$\begin{aligned} u(t) &= \emptyset_0(t), \\ 0 &\leq t \leq t_0, \end{aligned}$$

Et chercher des solutions de

$$u\prime(t) = f(t, u(t)) + \int_0^t K(t, s, \emptyset_0(s))ds + \int_{t_0}^t K(t, s, u(s))ds \tag{2.9}$$

pour $t \geq t_0$ qui dépendent $(t_0, \emptyset_0)$. Naturellement,(2.9) peut aussi être exprimée sous la forme (2.8). Pour voir cela, $y(t) = u(t + t_0)$, de sorte que (2.9) est transformé en

$$y\prime(t) = F(t, y(t)) + \int_0^t G(t, s, y(s))ds, \tag{2.10}$$

où

$$\begin{aligned} F(t, y(t)) &= f(t + t_0, y(t)) + \int_0^{t_0} K(t + t_0, s, \emptyset_0(s))ds \\ \text{et } \ G(t, s, y) &= K(t + t_0, s + t_0, y) \end{aligned}$$

Ici, la fonction initiale $\emptyset_0(t)$ est absorbé dans la fonction de source de F.

Nous allons aussi parfois envisager l'équations intégro-différentielles de la forme

$$u\prime(t) = f(t, u(t)) + \int_{-\infty}^t K(t, s, u(s))ds,$$

et

$$\begin{aligned} u\prime(t) &= f(t, u(t)) + \int_{t-T}^t K(t, s, u(s))ds, \\ T &> 0, \end{aligned}$$

2.3 Résolution des équations intégro-différentielles de Volterra

Dans cette section, nous présenterons des méthodes mathématiques pour obtenir la solution des équations intégro-différentielles de Volterra. Nous concentrons a étudier l'équation intégrale qui implique le noyau séparable de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t)$$

2.3.1 la méthode de la série de solution

Considérons une forme standard d'équation intégro-différentielle de Volterra d'ordre n comme suit:

$$u^n(x) = f(x) + g(x)\int_0^x h(t)u(t)dt \tag{2.11}$$

$$u^n(0) = b_k$$

$$0 \ \leq k \leq (n-1)$$

Nous suivrons la méthode Frobenius de la série de solution pour résoudre des équations différentielles ordinaires autour d'un point ordinaire. Pour accomplir ce but, nous supposons en premier lieu que la solution $u(x)$ de l'équation (2.11) est une fonction analytique et d'où elle peut être représentée par une dévlopment de série au point ordinaire $x = 0$ donné par

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.12}$$

où les coefficients a_k sont des constantes inconnues et doivent être déterminées. Il est à noter que les premiers coefficients a_k peuvent être déterminés en utilisant les conditions initiales : $a_0 = u(0), a_1 = u'(0), a_2 = \frac{1}{2!}u^{"}(0)$, et ainsi de suite dépendant sur le nombre des conditions initiales, alors que les coefficients restants a_k seront déterminés de l'application de la technique comme il sera discuté plus tard. Substituant l'équation (2.12) dans l'équation

(2.11) engendre

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)^n = f(x) + g(x) \int_0^x (\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k) dt \tag{2.13}$$

Etant donné l'équation (2.13), l'équation (2.11)sera réduite aux intégrales calculables dans le côté droit d'équation (2.13) qui peut être évalué facilement où nous devons intégrer des termes de la forme $t^n, n > 0$. Le prochain étape est d'écrire le dévlopment de Taylor pour $f(x)$, évaluer les intégrales traditionnelles résultantes , c-à-d l'équation (2.13) , et puis mettre en égalité de même puissances de x dans les deux côtés de l'équation . Cela mènera à une détermination complète des coefficients $a_1, a_2, ... a_k, k \geq 0$ de la série dans l'équation . Par conséquent , substituer les coefficients obtenus dans l'équation produite la solution dans la forme de série. Cela peut donner une solution dans le forme fermée, si le dévlopment obtenue est le dévlopment de Taylor à une fonction élémentaire bien connu, ou nous pouvons utiliser la solution de la forme de série si une forme fermée n'est pas accessible.

Donner un apercu clair de la méthode décrite devrait être appliquée pour les équations intégro -différentielles de Volterra effectivement , la méthode de la série de solution sera illustrée par cet exemple

Exemple 2.3.1

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante

$$u^{"}(x) = x \cosh(x) - \int_0^x t u(t) dt \tag{2.14}$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 1$$

en utilisant la méthode de la série de solution

Substituons $u(x)$ *par la série*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dans l'équation (2.14) *et utiliser le dévlopment du Taylor de* $\cosh(x)$ *, on obtient*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \int_0^x t(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt \tag{2.15}$$

En utilisant les conditions initiales, nous avons $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. En évaluant les intégrales, cela implique des termes de la forme $t^n, n > 0$, par conséquent, utilisant les valeurs de ces coefficients, la solution pour $u(x)$ peut être écrite comme suit :

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ... = x(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...) - (a_1\frac{x^3}{3} + a_2\frac{x^4}{4} + a_3\frac{x^5}{5})$$

mettre en égalité de même puissances dans les deux côtés nous trouvons $a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = 0$, et en général $.a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, n \geq 0$.
Donc, utilisons les valeurs de ces coefficients, la solution peut être écrite en forme de série

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

et dans une forme fermée

$$u(x) = \sinh(x)$$

est la solution exacte d'équation (2.14) .

2.3.2 La méthode de décomposition

Dans cette section, nous introduirons la méthode de la décomposition et la méthode de la décomposition modifiée pour résoudre les équations intégro-différentielles de Volterra. Cette méthode semble être fiable et efficace.

Sans perte de généralité, nous pouvons accépter une forme standard aux équation intégro-différentielles de Volterra définies par la forme standard

$$u^n(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.16}$$

$$u^k(0) = b_k$$

$$0 \ \leq k \leq (n-1)$$

où u^n est le dérivé d'énième ordre de $u(x)$ en ce qui concerne x et b_k sont des constantes qui définissent les conditions initiales. C'est naturel de chercher une expression pour $u(x)$ qui sera dérivée de cette équation. Cela peut être fait en intégrant les deux côtés de l'équation de 0 à x autant selon l'ordre du dérivé . Par conséquent, nous obtenons

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\ ) \tag{2.17}$$

Où $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k$ est obtenu en utilisant les conditions initiales, et L^{-1} est un opérateur d'intégration. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de la décomposition

en définissant la solution $u(x)$ de l'équation sur une série comme suit

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Substitution dans les deux côtés de l'équation (2.17) nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}(\int_0^x K(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x))dt\ )$$

Cette équation peut être écrite explicitement comme

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 ...... &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_0(x)dt\ ) + L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_1(x)dt\ ) \\ &+ L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_2(x)dt\ ) + ... \end{aligned}$$

les composants $u_0(x), u_1(x), +u_2(x)$....... de la fonction inconnue sont déterminée avec une manière récursive, si nous mettons

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x))$$

$$u_1(x) = L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_0(x)dt\ )$$

$$u_2(x) = L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_1(x)dt\ )$$

$$u_3(x) = L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_2(x)dt\ )$$

sont déterminée dans une manière récursive, si nous mettons

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x))$$

$$u_{n+1}(x) = L^{-1}(\int_0^x K(x,t)u_n(x)dt\ )$$

Vu les composants $u_0(x), u_1(x), +u_2(x)$.......

il sont déterminés immédiatement. Une fois que ces composants sont déterminés, la solution $u(x)$ de l'équation est obtenu alors comme une forme de série que l'on utilise dans l'équation . la solution de la série peut être mise dans une solution de forme fermée exacte qui peut être clarifiée par quelque illustration comme suit. Il sera noté ici que les phénomènes des termes de bruit auto-éliminant qui ont été introduits avant peuvent être appliqués ici si les termes de bruit paraissent dans $u_0(x)$ et $u_1(x)$. L'exemple suivant expliquera comment nous pouvons utiliser la méthode de la décomposition.

Exemple 2.3.2

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante

$$u''(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.18}$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 1$$

en utilisant la méthode de décomposition. vérifiez le résultat par la méthode de transformation de Laplace .

Solution

Appliquer l'intégration de l'opérateur L^{-1}

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dx$$

aux deux côtés d'équation (2.18), c-à-d. intégrant les deux côtés d'équation (2.18) deux fois de 0 à x, et utilisant les conditions initial donnés

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\ \right)$$

Suivant le plan de la décomposition, nous trouvons

$$u_0(x) = x + \frac{x^3}{3!}$$

$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt\ \right) = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(x)dt\ \right) = \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!}$$

Avec ces étapes la solution finale peut être écrite comme

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + ...$$

et cela mène à $u(x) = \cosh(x)$, la solution exacte dans le forme fermée. En utilisant la méthode de transformation de Laplace avec le concept de la convolution et utilisant les conditions initiales de l'équation donnée peut être très simplifié facilement

$$L(u(x)) = \frac{s}{s^2 - 1}$$

Et en prenant la transformation inverse, on obtient $u(x) = \cosh(x)$ qui est identique au résultat précédant.

Conversion aux équations intégrales de Volterra:

Cette section concerne la conversion aux équations intégrales de Volterra. Nous pouvons facilement convertir l'équation intégro-différentielle de Volterra en équation intégrale de

Volterra équivalente, à condition, le noyau est un noyau de différence défini par $K(x,t) = K(x-t)$. Cela peut être facilement fait en intégrant les deux côtés de l'équation et en utilisant les conditions initiales. Réaliser la conversion à une équation intégrale régulière de Volterra,

on doit utiliser la formule bien-connu décrite dans Chapitre 1 qui convertit des intégrales multiples à une seule intégrale. Nous illustrons pour l'avantage trois formules spécifiques:

$$\int_0^x \int_0^x u(t)dt = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$$

$$\int_0^x \ldots\ldots \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)dt$$

(intégration énième)

Ayant établi la transformation à une équation intégrale standard de Volterra nous pouvons continuer utiliser n'importe quelle méthode alternative examinée dans les chapitres précédant. Pour donner un apercu claire de cette méthode, nous donnons l'exemple suivant

Exemple 2.3.3

Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante

$$u'(x) = 2x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^x u(t)dt \tag{2.19}$$

$$u(0) = 0$$

Solution

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^x u(t)dt\ dt$$

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Chapitre 3

Résolution Numérique des équations intégro-différentielles de Volterra

3.1 Méthode de collocation (Polynôme de Bessel)

Polynômes de Bessel de premier espèce

Les polynôme de Bessel tronqué de degré n de premier espèce, défini par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{N-n}{2}} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} (\frac{x}{2})^{2k+n} \tag{3.1}$$

$$n \in N, 0 \leq x < \infty$$

Principe de la méthode :

Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra d'ordre n suivante

$$u^n(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.2}$$

$$n \in N, a \leq x \leq b$$

Sous les conditions initiale

$$u^k(a) = \alpha_j \tag{3.3}$$

Où : $u^0(x) = u(x)$ est une fonction inconnue.

$k(x)$, $g(x)$ et $K(x,t)$ sont des fonctions connues définis sur l'intervalle $a \leq x \leq b$.

a_{jk} et b_{jk} sont des constants réels ou complexes.

Notre but est interpoler la solution u de (3.2) par

$$p_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n J_n(x) \tag{3.4}$$

$$n \leq N$$

tel que : $n = 0, 1, 2, ..., N$ sont les coefficients inconnus de Bessel et N choisi de tel sorte qu'un nombre entier positif $N > n$ et $J_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ..., N$ sont des polynômes de Bessel du première espèce donnée par (3.1) à telle que p_N et u sont égaux sur les noeuds $a \leq x_0 \leq x_1 .... \leq x_N$. le fait que toutes les valeurs $u(x_i)$, sont inconnues,on peut utilise (3.2) pour trouver les polynômes de l'interpolation au $x_0, x_1, ...x_N$ sans connaître les valeurs $u(x_i)$. pour faire ça, Nous avons mis l'interpolation polynômial p_N : $p_N(x)$ $= c_0, c_1x, c_2x^2.........c_Nx^N$ dans (3.2).

Si p_N égale u sur les noeuds, alors p_N satisfait (3.2), d'où on peut obtenir un système d'équations linéairement indépendantes à $c_0, c_1, c_2.........c_N$.

Par conséquent, nous pouvons trouver la solution (3.2) avec quelques erreurs qui sont erreurs de l'interpolation et computationnels.

Relations fondamentales

On écrit $J_n(x)$ sous forme matriciel comme suite :

$$J^T(x) = DX^T(x) \rightarrow J(x) = X(x)D^T \tag{3.5}$$

$$J(x) = [J_0(x), J_1(x), J_2(x).........J_N(x)]$$

et

$$X(x) = [1, x, x^2, ..., x^N]$$

Si N est impair

$$D=\begin{bmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^0} & \ldots\ldots\ldots & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N-1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^{N}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & \ldots\ldots & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^{N}} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!(N)!2^N} \end{bmatrix}_{(N+1)*(N+1)}$$

Si N est pair

$$D=\begin{bmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^0} & \ldots\ldots\ldots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!2^{N}} \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \ldots\ldots\ldots & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & \ldots\ldots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!2^{N}} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!(N)!2^N} \end{bmatrix}_{(N+1)*(N+1)}$$

On pose (3.2)sous la forme

$$D(x) = g(x) + I(x) \tag{3.6}$$

telle que

$$D(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k u^k(x)$$

$$I(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

maintenant on convertit la solution $u(x)$ et ses dérivées $u^n(x)$, la partie $D(x)$ et $I(x)$ et les conditions mixtes de (3.3)aux formes matriciels

La forme matricielle pour la partie différentiel D(x)

On considère la solution voulue $u(x) = p_n(x)$ de l'équation (3.2) défini par la série de Bessel tronquée (3.1)

On écrit la relation (3.6) sous la forme matricielle

$$|u(x)| = J(x)A \tag{3.7}$$

$$A = [a_0, a_1, a_2.........a_N] \tag{3.8}$$

de (3.5) on a :

$$u(x) = X(x)D^T A$$

On a aussi la relation entre la matrice $X(x)$ et ses dérivés $X^{(1)}(x)$ comme suite

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \tag{3.9}$$

Où

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De l'équation (3.9) on écrit sous forme récurrente .

$$\begin{aligned} X^{(0)}(x) &= X(x) \qquad (3.10)\\ X^{(1)}(x) &= X(x)B^T \\ X^{(2)}(x) &= X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ X^{(k)}(x) &= X^{k-1}(x)B^T = X(x)(B^T)^k \end{aligned}$$

Utilisant (3.8) et (3.10) on obtient

$$u^k(x) = X^{(k)}(x)D^T A = X(x)(B^T)^k D^T A \tag{3.11}$$

$$k = 0, 1, 2, ...$$

La forme matricielle pour la partie intégrale $I(x)$

Le noyau $K(x,t)$ peut être approcher par la série de Maclaurin tronquée et la série de Bessel tronquées. respectivement

$$K(x,t)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}K_{mn}^{t}x^{m}t^{n}$$

et

$$K(x,t)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}K_{mn}^{b}J_{m}(x)J_{n}(t) \tag{3.13}$$

Où

$$K_{mn}^{t}=\frac{1}{m!n!}\frac{d^{m+n}K(0,0)}{dx^{m}dt^{n}}$$

$$m,n=0,1,2,............N$$

On pose les relations données à (3.13) aux formes matricielles suivantes :

$$K(x,t)=X(x)K_{t}X^{(T)}(t) \tag{3.14}$$

$$K_{mn}^{t}=K_{t}$$

et

$$K(x,t)=J(x)K_{b}J^{(T)}(t) \tag{3.15}$$

$$K_{mn}^{b}=K_{b}$$

De l'équation (3.14)et (3.15)on obtient les relations suivantes

$$X(x)K_{t}X^{(T)}(t)=J(x)K_{b}J^{(T)}(t)\rightarrow X(x)K_{t}X^{(T)}(t)=X(x)D^{T}K_{b}DX^{T}(t)$$

d'où

$$K_{t}=D^{T}K_{b}D$$

ou

$$K_{b}=(D^{T})^{-1}K_{t}D^{-1} \tag{3.16}$$

En remplaçant les formes matricielles (3.7) et (3.15) dans la partie intégrale $I(x)$ en (3.6), on obtient la forme matricielle

$$\begin{aligned}[I(x)] &= \int_a^x J(x)K_b J^{(T)}(t)J(t)Adt \\ &= J(x)K_b QA\end{aligned} \tag{3.17}$$

tel que

$$\begin{aligned}Q &= \int_a^x J^{(T)}(t)J(t)dt \\ &= \int_a^x DX^T(t)X(t)D^T dt \\ &= DHD^T\end{aligned}$$

D'où

$$H = \int_a^x X^T(t)X(t)dt = [h_{ij}(x)]$$

avec

$$h_{ij} = \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}; \qquad i,j = 0,1,2,.........N$$

En remplaçant la matrice (3.5)dans l'expression (3.17) on obtient la forme matricielle suivante

$$[I(x)] = X(x)MH(x)D^T A$$

$$M = D^T K_b D$$

La forme matricielle pour les conditions :

On peut obtenir les formes matricielles correspondantes pour les conditions (3.3) et par (3.11) comme suivant

$$u^k(a) = X^{(k)}(a)D^T A = X(a)(B^T)^k D^T A = [\alpha_j] \tag{3.19}$$

maintenant on a l'équation matricielle correspondant à l'équation (3.2), pour ce but on remplace les relations matricielles (3.12)et (3.18) dans (3.6). donc on a

$$X(x)(B^T)^k D^T A = g(x) + X(x)MH(x)D^T A$$

En utilisant les points de collocation définis par

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \qquad i = 0, 1, 2, ...N$$

Dans l'équation (3.20),on obtient le système matriciel

$$X(x_i)(B^T)^k D^T A = g(x_i) + X(x_i)MH(x_i)D^T A \tag{3.21}$$

$$i = 0, 1, 2, ...N$$

et on écrit

$$\left\{X(B^T)^k D^T - \tilde{X}\tilde{M}\tilde{H}\tilde{D}\right\} A = G \tag{3.22}$$

$$G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & . & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & x_1^N \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_N & x_N^2 & . & . & x_N^N \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & X(x_1) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & X(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & M & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & M \end{bmatrix}_{(N+1)*(N+1)}$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & H(x_1) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & H(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} D^T \\ D^T \\ . \\ . \\ . \\ D^T \end{bmatrix}_{(N+1)*1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix}$$

Donc la matrice fondamentale de l'équation (3.22) correspondante à l'équation (3.2) peut être écrite sous la forme

$$WA = G \quad , [W; G]$$

$$W = X(B^T)^k D^T - \tilde{X}\tilde{M}\tilde{H}\tilde{D} \tag{3.23}$$

On note que l'équation (3.22) correspondant à système de $(N+1)$ équations algébriques linéaires avec les coefficients inconnus de Bessel $a_0, a_1, a_2.........a_N$.

D'autre côté la forme matricielle des conditions initiales de 3.19 peut être écrite :

$$U_j A = [\alpha_j] \quad ; \quad [U_j; \alpha_j]$$

$$\begin{aligned} U_j &= X(a)(B^T)^k D^T \\ &= [u_{j0}, u_{j1}, ...u_{jN}], j = 0, 1, ...m-1. \end{aligned}$$

Pour obtenir de solution de (3.2) sous les conditions (3.3), en remplaçant les lignes de matrice U_j et j par les lignes de la matrice W et G respectivement, on obtient :

$$[W; G] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & ... & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & ... & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & ... & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ . & . & . & . & . & ; & . \\ u_{N-m0} & u_{N-m0} & u_{N-m0} & ... & u_{N-m0} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & ... & u_{0N} & ; & \alpha_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & ... & u_{1N} & ; & \alpha_1 \\ u_{m-10} & u_{m-10} & u_{m-10} & ..... & u_{m-10} & ; & \alpha_{m-1} \end{bmatrix}$$

Notons que $rang\tilde{W} = rang[\tilde{W};\tilde{G}] = N+1$,si ce n'est pas, ce serait une contradiction à

$$A = (\tilde{W})^{-1}\tilde{G}$$

et les éléments a_0, a_1, a_2.........a_N de A sont déterminés de façon unique

Exemple 3.1.1

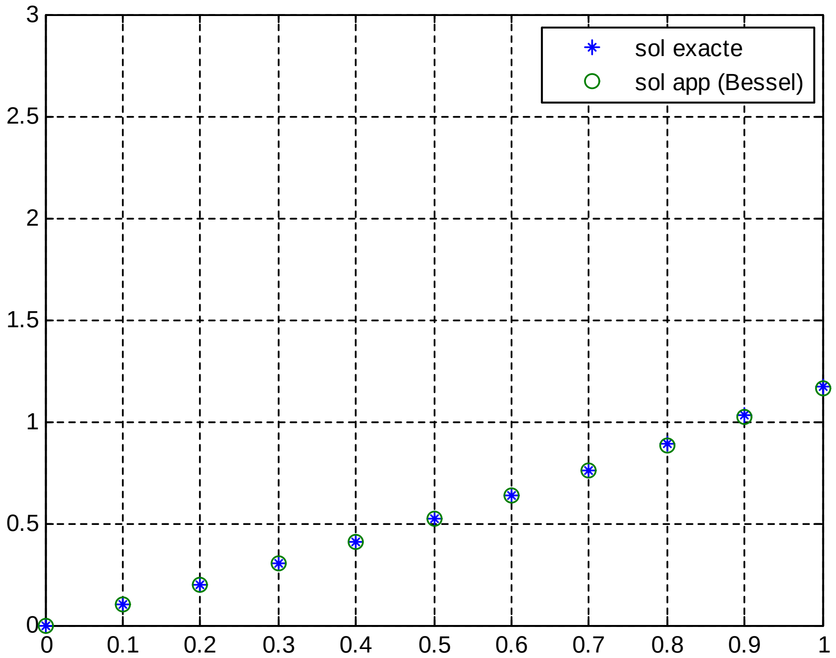
Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra d' ordre 2

$$u"(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 1 \end{aligned}$$

La solution exacte est $u(x) = \sinh(x)$.

noeud	sol exact	sol app (Bessel)	erreur
0.0	0.00000000	0.00000000	0.000e+000
0.1	0.10016675	0.10016666	9.353e-008
0.2	0.20133600	0.20133301	2.996e-006
0.3	0.30452029	0.30449750	2.279e-005
0.4	0.41075233	0.41065603	9.629e-005
0.5	0.52109531	0.52080049	2.948e-004
0.6	0.63665358	0.63591709	7.365e-004
0.7	0.75858370	0.75698442	1.599e-003
0.8	0.88810598	0.88497111	3.135e-003
0.9	1.02651673	1.02083309	5.684e-003
1.0	1.17520119	1.16551030	9.691e-003


sol exacte
sol app (Bessel)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

3.2 Méthode de collocation (Polynôme de Taylor)

Une méthode de matrice pratique, est présentée pour trouver une solution approchée pour les équations intégro-différentielles de Volterra linéaires, en terme de polynôme de Taylor . La méthode convertit l'E.I-D à une système matriciel qui correspond à un système des équations algébriques linéaires .

Soit l'E.I-D de Volterra d'ordre n

$$u^{n}(x) = f(x) + \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{3.25}$$

$$u^{k}(a) = \alpha_{k} \tag{3.26}$$

Où : α_k sont des constants avec $f(x)$ et $K(x,t)$ sont définis sur l'intervalle $[a,b]$.

La solution $u(x)$ sera exprimé par la série de Taylor suivant

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-c)^n$$

$$a_n = \frac{u^n(c)}{(n)!} \quad n = 0, 1........N \tag{3.27}$$

Le but de cet méthode est de déterminer les coefficients a_n ,

Relations matricielle fondamentales :

On pose (3.25) sous forme

$$D(x) = g(x) + I(x) \tag{3.28}$$

$$D(x) = u^{k}(x)$$

$$I(x) = \int_{0}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

maintenant, on va convertir la solution $u(x)$ et ses dérivées $u^k(x)$, la partie différentielle $D(x)$ et la partie intégrale $I(x)$ et les conditions mixtes aux formes matricielles

Forme matricielle pour la partie différentielle $D(x)$:

On considère la solution $u(x)$ de (3.25) définie par la série de Taylor

$$u(x) = X(x)A \tag{3.29}$$

Où :

$$X(x) = [1, (x-c), (x-c)^2.................(x-c)^N]$$

On a aussi la relation entre $X(x)$ et ses dérivées est

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \tag{3.30}$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \end{bmatrix}$$

De la matrice (3.30)on obtient

$$\begin{aligned} X^{(1)}(x) &= X(x)B^T \qquad (3.31) \\ X^{(2)}(x) &= X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &. \\ X^{(k)}(x) &= X^{k-1}(x)B^T = X(x)(B^T)^k \end{aligned}$$

De 3.29 et 3.31 la relation de récurrente est :

$$u^k(x) = X^{(k)}(x)A = X(x)(B^T)^k A \tag{3.32}$$

$$k = 0, 1, 2, ...$$

Forme matricielle pour la partie intégrale $I(x)$:

Le noyau $k(x,t)$ peut être approximer par la série de Taylor de degré N sur $x = c$ et $t = c$, sous la forme :

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} K_{mn}(x-c)^m(t-c)^n \tag{3.34}$$

Où

$$K_{mn} = \frac{1}{m!n!}\frac{d^{m+n}K(c,c)}{dx^m dt^n}$$

$$m, n = 0, 1, 2, ...N$$

On pose (3.34) sous forme matricielle

$$[K(x,t)] = X(x)KX^{(T)}(t) \tag{3.35}$$

Où

$$X(t) = [1, (t-c), (t-c)^2................(t-c)^N]$$

et

$$K_{mn} = K$$

En substituant la forme (3.29) et (3.35)dans (3.28),on a la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} [I(x)] &= \int_a^x X(x)KX^{(T)}(t)X(t)Adt \\ &= X(x)K\left\{\int_a^x X^{(T)}(t)X(t)dt\right\}A \\ &= X(x)KQA \end{aligned} \tag{3.36}$$

avec

$$Q = \int_a^x X^{(T)}(t)X(t)dt = [q_{ij}]$$

$$[q_{ij}] = \frac{(x-c)^{i+j+1} - (a-c)^{i+j+1}}{i+j+1}; \quad i, j = 0, 1, 2, ...N$$

Représentation matricielle pour $g(x)$:

Le terme nonhomogène de l'équation (3.25) $g(x)$ peut s'écrire sous forme :

$$[g(x)] = \left[\sum_{n=0}^{N} g_n(x-c)^n\right]$$

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{g^n(c)}{(n)!} \\ &= X(x)G \end{aligned} \tag{3.37}$$

avec

$$G = [g_0, g_1, \ldots\ldots\ldots\ldots g_N]^T$$

En remplaçant les relations (3.33) et (3.36)et (3.37) dans (3.28) il en résulte l'équation suivante :

$$X(x)(B^T)^k A = X(x)G + X(x)KQA \tag{3.38}$$

Représentation matricielle pour les conditions initiale:

On peut obtenir la forme matricielle de conditions (3.26) de (3.32) on a :

$$u^k(a) = X^{(k)}(a)A = X(a)(B^T)^k A = [\alpha_j] \tag{3.39}$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots m-1$$

Pour calculer les coefficients , on utilise les points de collocations suivantes

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots\ldots.N \tag{3.40}$$

tel que $a \leq x_i \leq b$ et $a = x_0 \leq x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \leq x_N = b$ dans l'équation (3.38) . On obtient:

$$X(x_i)(B^T)^k A = X(x_i)G + X(x_i)KQA$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots\ldots.N$$

et on écrire

$$\left\{(B^T)^k - KQ\right\} A = G \tag{3.41}$$

telle que

$$G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ . \\ . \\ . \\ g_N \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & . & . & .... & a_N \end{bmatrix}^T$$

L'équation (3.41) correspond à une système de $(N+1)$ équations algébriques pour $(N+1)$ coefficients de Taylor inconnus. Alors on peut écrire (3.41) comme suit

$$WA = G \quad , [W; G] \tag{3.42}$$

$$WA = [w_{pq}] = (B^T)^k - KQ \quad \text{avec} \quad p, q = 0, 1, 2, ...N$$

Du même façon, la forme matricielle pour les conditions initial dans (3.39) peut être écrite comme suit

$$U_j A = [\alpha_j] \quad ; \quad [U_j; \alpha_j] \tag{3.43}$$

$$j = 0, 1, ...m - 1$$

avec

$$\begin{aligned} U_j &= X(a)(B^T)^k \\ &= [u_{j0}, u_{j1}, ...u_{jN}], j = 0, 1, ...m - 1. \end{aligned}$$

En remplaçant les lignes du matrice (3.43) par les lignes de dernières m lignes du (3.42), il en résulte la nouvelle matrice augmentée

$$[\tilde{W};\tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \cdots & w_{0N} & ; & g_0 \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} & ; & g_1 \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} & ; & g_2 \\ . & . & . & . & . & ; & . \\ u_{N-m,0} & u_{N-m,1} & u_{N-m,2} & \cdots & u_{N-m,N} & ; & g_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0N} & ; & \alpha_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} & ; & \alpha_1 \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \cdots\cdots & u_{m-1,N} & ; & \alpha_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Si rang$\tilde{W}$ $=$ rang$[\tilde{W};\tilde{G}] = N+1$, alors

$$A = (\tilde{W})^{-1}\tilde{G} \tag{3.45}$$

et la matrice A ainsi les coefficients $(a_n,\ n = 0,1,...,N)$ sont déterminés de façon unique, donc l'équation (3.25) avec les conditions (3.26) a une solution unique est donnée par polynôme de Taylor 3.27

Exemple 3.2.1

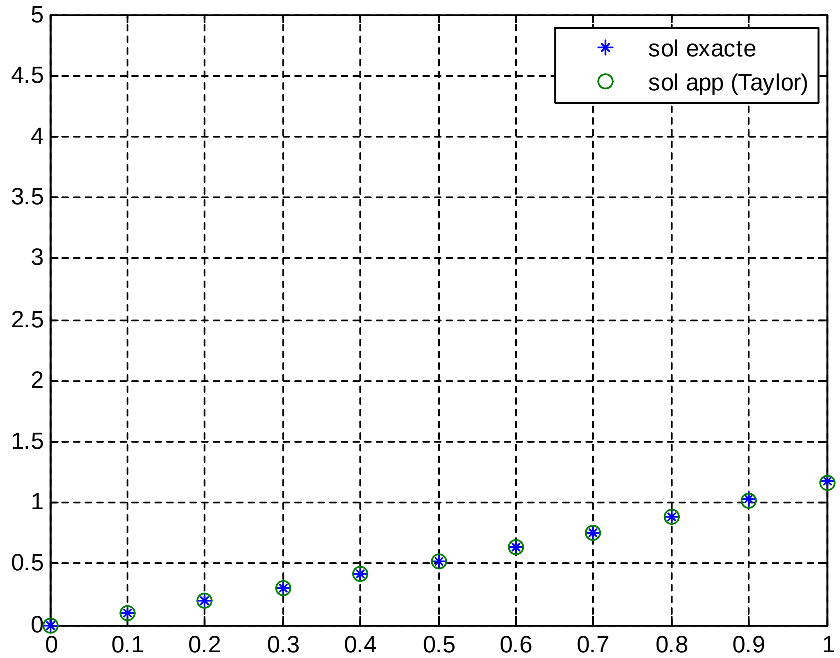
Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra d'ordre 2

$$u"(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 1 \end{aligned}$$

La solution exacte est $u(x) = \sinh(x)$.

noeud	sol exact	sol app (Taylor)	erreur
0.0	0.000000000	0.000000000	0.000e+000
0.1	0.100166750	0.100166640	1.097e-007
0.2	0.201336003	0.201333087	2.915e-006
0.3	0.304520293	0.304499082	2.121e-005
0.4	0.410752326	0.410664240	8.809e-005
0.5	0.521095305	0.520827797	2.675e-004
0.6	0.636653582	0.635987604	6.660e-004
0.7	0.758583702	0.757136427	1.447e-003
0.8	0.888105982	0.885250412	2.856e-003
0.9	1.026516726	1.021257698	5.259e-003
1.0	1.175201194	1.165963097	9.238e-003


sol exacte
sol app (Taylor)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

3.3 Méthodes des différences finies

Soit u une fonction définie sur $[a;b]$, et soit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <:::< x_n = b;$$

$$x_j = a + jh,\ \ h = \frac{b-a}{n}$$

une partition de $[a;b]$; alors on note par

$$u(x_j) = u_j, j = 1.2 \ldots\ldots n$$

telles que les différences supérieures a l'ordre 1 sont données par

$$\frac{du}{dx}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x})}{h} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}$$

les différences inférieures a l'ordre1 sont données par

$$\frac{du}{dx}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x}-h)}{h} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}$$

les différences centrées a l'ordre 1 sont données par

$$\frac{du}{dx}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{u(\bar{x}+h) - u(\bar{x}-h)}{h} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}$$

Si $u \in C^{\infty}([a;b])$; alors

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_i)^k}{k!} u^k(x_i) + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(x-x_i)^k}{k!} u^k(x_i)$$

Le terme

$$\beta_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(x-x_i)^k}{k!} u^k(x_i) = \frac{(x-x_i)^k}{(n+1)!} u^{n+1}(x_i)$$

m est appelé le terme d'erreur de troncature.

Principe de la méthode des différences finies:

La méthode des différences finies consiste a remplacer approximativement chaque dérivée contenue dans l'équation intégro-différentielle du problème aux limites par le rapport des différences. Pour accomplir ceci on divise l'intervalle $[a;b]$ en$N+1$ intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{N+1}$ et dont les extrémités sont données par $x_j = a + jh$; $j = 0; 1; :::; N$:

Cette méthode se divise donc en deux étapes

3.3.1 Application a l'équation intégro-différentielle linéaire du 1 ère ordre (schéma centre):

Soit le problème aux limites suivant

$$u^{'}(x) = f(x) + \int_{0}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{3.46}$$

$$u(0) = u_0$$

L'équation (3.46), est vraie pour tout $x \in [a;b]$; en particulier pour tout x_j, $j = 0; 1; :::$ $; N+1$; on a

$$u^{'}(x_j) = f(x_j) + \int_{0}^{x_j} K(x_j,t)u(t)dt \tag{3.47}$$

Supposons $u \in C^4[a;b]$; alors d'après la formule de Taylor, il existe $x < \mu_j < x_j$, telle que

$$u(x) = u(x_j) + (x - x_j)u'(x_j) + \frac{(x-x_j)^2}{2!}u''(x_j) + \frac{(x-x_j)^3}{3!}u'''(x_j) + \frac{(x-x_i)^4}{4!}u^{(4)}(\mu_j)$$

Evaluons $u(x)$ aux points x_{j-1} et x_j ; nous obtenons:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x)$$

$$u(x+h) - u(x-h) = u(x) + hu'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) - u(x) + hu'(x) - \frac{(h)^2}{2!}u''(x)$$

$$u(x_{j+1}) - u(x_{j+1}x) = hu'(x_j) + hu'(x_j)$$

$$u(x_{j+1}) - u(x_{j+1}x) = 2hu'(x_j)$$

$$u'(x_j) = \frac{1}{2h}(u(x_{j+1}) - u(x_{j-1}x))$$

pour la partie intégral en utilisons la méthode des Trapèzes l'équation intégro-différentielle (3.46) est

$$\frac{1}{2h}(u(x_{j+1})-u(x_{j-1}x))=f(x_j)+(\frac{h}{2}K(x_j,t_0)u(t_0)+h\sum_{i=0}^{j-1}K(x_j,t_i)u(t_i)+\ \frac{h}{2}K(x_j,t_j)u(t_j))$$

avec les notations $u(x_j)=u_j; f(x_j)=f_j; K(x_j,t_i)=K_{ji}$, cette formule s'écrit

$$\frac{1}{2h}(u_{j+1}-u_{j-1})=f_j+(\frac{h}{2}K_{j0}u_0+h\sum_{i=0}^{j-1}K_{ji}u_i+\ \frac{h}{2}K_{jj}u_j)$$

En général

$$\frac{1}{2h}(u_{j+1}-u_{j-1})-\frac{h}{2}K_{jj}u_j=f_j+(\frac{h}{2}K_{j0}u_0+h\sum_{i=0}^{j-1}K_{ji}u_i)$$

D'où :

$$u_0=f_0$$

Cette discrétisation nous à fournie alors un système des équations algébriques linéaires, de la forme : $Au=b$, où A est une matrice triangulaire inférieure i.e.

$$u=(u_0,u_1,.............,u_n); b=(f_0,f_1,..........,f_n)$$

et

$$A=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0\\
-(\frac{1}{2h}+\frac{h}{2}K_{10}) & -\frac{h}{2}K_{11} & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & . & . & 0\\
-\frac{3h}{2}K_{20} & -(\frac{1}{2h}+hK_{21}) & -\frac{h}{2}K_{22} & \frac{1}{2h} & 0 & . & . & 0\\
-\frac{3h}{2}K_{30} & -hK_{31} & -(\frac{1}{2h}+hK_{32}) & -\frac{h}{2}K_{33} & \frac{1}{2h} & . & . & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{2h}\\
-\frac{3h}{2}K_{n0} & -hK_{n1} & -hK_{n2} & . & . & -hK_{nn-2} & -(\frac{1}{2h}+hK_{nn-1}) & -\frac{h}{2}K_{nn}
\end{bmatrix}$$

3.3.2 Application a l'équation intégro-différentielle linéaire du 1 ère ordre (schéma arrière):

Soit le problème aux limites suivant

$$u^{'}(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.47}$$

$$u(0) = u_0$$

L'´équation (3.47), est vraie pour tout $x \in [a; b]$; en particulier pour tout x_j, $j = 0; 1; :::$ $; N + 1$; on a

$$u^{'}(x_j) = f(x_j) + \int_{0}^{x_j} K(x_j, t)u(t)dt \tag{3.48}$$

Supposons $u \in C^4[a; b]$; alors d'après la formule de Taylor, il existe $x < \mu_j < x_j$, telle que

$$u(x) = u(x_j) + (x - x_j)u'(x_j) + \frac{(x - x_j)^2}{2!}u''(x_j) + \frac{(x - x_j)^3}{3!}u'''(x_j) + \frac{(x - x_i)^4}{4!}u^{(4)}(\mu_j)$$

Evaluons $u(x)$ aux points x_{j-1} et x_j ; nous obtenons:

$$u(x - h) = u(x) - hu'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x)$$

$$u(x) - u(x - h) = u(x) - u(x) + hu'(x)$$

$$u(x_j) - u(x_{j-1}) = hu'(x_j)$$

$$u'(x_j) = \frac{1}{h}(u(x_j) - u(x_{j-1}))$$

pour la partie intégrale en utilisons la méthode des Trapèzes, l'équation intégro-différentielle (3.47) devient

$$\frac{1}{h}(u(x_j) - u(x_{j-1})) = f(x_j) + (\frac{h}{2}K(x_j, t_0)u(t_0) + h\sum_{i=0}^{j-1} K(x_j, t_i)u(t_i) + \ \frac{h}{2}K(x_j, t_j)u(t_j))$$

avec les notations $u(x_j) = u_j; f(x_j) = f_j; K(x_j, t_i) = K_{ji}$, cette formule s'écrit

$$\frac{1}{h}(u_j - u_{j-1}) = f_j + (\frac{h}{2}K_{j0}u_0 + h\sum_{i=0}^{j-1} K_{ji}u_i + \ \frac{h}{2}K_{jj}u_j)$$

En général

$$\frac{1}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) - \frac{h}{2}K_{jj}u_j = f_j + (\frac{h}{2}K_{j0}u_0 + h\sum_{i=0}^{j-1} K_{ji}u_i)$$

D'où :

$$u_0 = f_0$$

Cette discrétisation nous à fournie alors un système des équations algébriques linéaires, de la forme : $Au = b$, où A est une matrice triangulaire inférieure i.e.

$$u = (u_0, u_1, ..., u_n); b = (f_0, f_1, ..., f_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -(\frac{1}{h} + \frac{h}{2}K_{10}) & \frac{1}{h} - \frac{h}{2}K_{11} & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -\frac{h}{2}K_{20} & -(\frac{1}{h} + hK_{21}) & \frac{1}{h} - \frac{h}{2}K_{22} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -\frac{h}{2}K_{30} & -hK_{31} & -(\frac{1}{h} + hK_{32}) & \frac{1}{h} - \frac{h}{2}K_{33} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ -\frac{h}{2}K_{n0} & -hK_{n1} & -hK_{n2} & . & . & -hK_{nn-2} & -(\frac{1}{h} + hK_{nn-1}) & \frac{1}{h} - \frac{h}{2}
\end{bmatrix}$$

Exemple 3.3.1

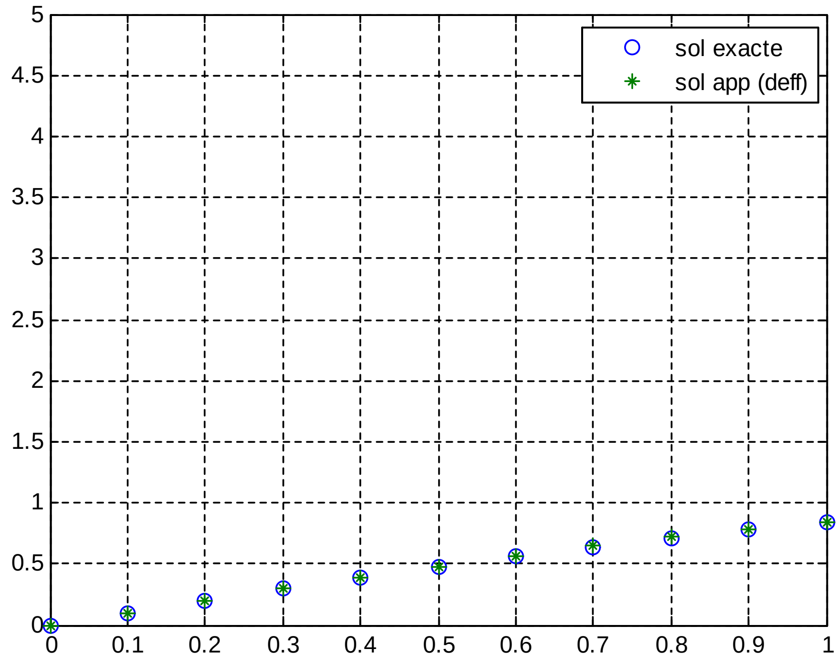
Soit l'équation intégro-différentielle de volterra de premier ordre

$$u^{'}x) = 1 - \int_0^x u(t)dt$$

$$u(0) = 0$$

La solution exacte est $u(x) = \sin(x)$

noeud	sol exact	sol app (difference finie)	erreur
0.0	0.000000000	0.000000000	0.000e+000
0.1	0.099833417	0.099502488	3.309e-004
0.2	0.198669331	0.197519863	1.149e-003
0.3	0.295520207	0.293084219	2.436e-003
0.4	0.389418342	0.385256869	4.161e-003
0.5	0.479425539	0.474127621	5.298e-003
0.6	0.564642473	0.558813840	5.829e-003
0.7	0.644217687	0.638469287	5.748e-003
0.8	0.717356091	0.712292650	5.063e-003
0.9	0.783326910	0.779545530	3.781e-003
1.0	0.841470985	0.839549796	1.921e-003


5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
sol exacte
sol app (deff)

CONCLUSION GENERALE

Nous proposons des méthode numérique de résolution des équations Intégro-différentielles de volterra . Notre objectif été de voir la performance de cette méthode et de contribuer à l'étude du comportement de l'erreur commise dans cette approche.

Dans une première étape, nous avons proposé des méthodes efficaces de résolution pour les équations intégro-différentielle. La méthode de la série de solution, La méthode de décomposition, Conversion aux équations intégrales de Volterra que a donne Solution analytique.

Dans une deuxième étape, nous avons proposé des méthodes numériques de résolution pour les équations intégro-différentielle de volterra. La méthode des différence finie est une méthode de quadrature, la méthode de collocation, où on a approché la solution sous forme de polynôme de Bessel de premier espèce, ainsi que polynôme de Taylor

On a illustré à la fin de notre mémoire des exemples avec la programmation par logiciel de calcul numérique

(MATLAB), où on a estimé les erreurs pour les deux méthodes de comparer les solutions approchées avec la solution exacte .

Bibliographie

[1] A. Allal, *Equations intégrales* liées aux systémes *différentielles,*.Mémoire de Magistère, Université de M'sila, 2010.

[2] B. GAGUI, *Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives*, Mémoire de Magistère, Université de M'sila, 2006.

[3] L. Kantham, *theory of integro deffrential eqution,* Florida USA.(1995)

[4] K. Maleknejad , Y. Mahmoudi, *Taylor polynomial solution of high-ordernonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations,* Jornal of elsevier, 641–653, 2003.

[5] M. Moussai,*Sur les solutions des équations intégrales et différentielles*, Mémoire de Magistère, Université de M'sila, 2010.

[6] M. Nadir, *Cours de Magistère.* Université de M'sila, 2011.

[7] A. Rahman, *Integral Equations and their Applications*, Dalhousie University, Canada, 2007.

[8] A. Rahmoune, *Résolution numérique des équations intégrales.* Mémoire de Magistère, Université de M'sila, 2004.

[9] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover publication, inc, New York, 1959.

[10] S. Yalcinbas and M. Sezer, *The approximate solution of high-order linearVolterra - Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials,* Jornal of elsevier, 291-308, 2000.

[11] Ş. Yüzbaşı, N. Şahin and Ahmet Yildirim, *A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations, Jornal of elsevier* , 547–563, 2012.