Dédicaces

⋆ Á mes parents et mes frêres ⋆
et ma petite famille ⋆ ma famme ainsi mes filles Nadjoua et maissa ⋆

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Mr. le prof . Mostefa Nadir de l'université de M'sila pour avoir accepté de diriger le travail de cette thèse, pour sa gentillesse, sa bonne volonté, sa disponibilité et sa patience ainsi ces orientation et ces guidances avisés .

Egualement j'adresse mes remerciements les plus sincères au Mrs. Gagui, Tahar Blizak, Lakhdar Habob, pour les conseils qu'ils ma prodigués et le temps précieux qu'ils ma consacrés .

Remércie tout particulièrement Monsieur Abed Elkader .Gasmi , qui a aimablement accepté de présider le Jury, j'exprime ainsi mes chaleureux remerciement à Mrs. Azedine Rahmoune et Abed Elbaki Marouani pour avoir acceptés d'être membres de Jury . Je tiens aussi a remercier mes camarades Mrs. Abdelhake Mortari, Lamri Rachide et Rabeh Mechter précisément ainsi que mes camarades de promotion 2009/2010

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous les membres du département de mathématiques .

Enfin je tiens aussi à remercier mes camarades et mes amis qui m'ont soutenu moralement et à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail .

Au delà de tous, une pensée particulière va à ma famille qui m'a soutenu durant toutes ces années à qui je dédie ce travail.

ملخص الرسالة:

المعادلات التفاتكاملية لفريدوم عولجت في ميادين علمية واسعة خاصة ميدان الرياضيات التطبيقية و الهدف الأساسي من هذا العمل هو اقتراح طرق عددية، لحل معادلات تفاتكاملية خطية لفريدوم من الصنف الثاني هذه الطرق تقوم على تقريب نواة مستمرة، أو مستمرة بضعف بنواة ذات رتبة منتهية والذي يساعد على الحصول على الحل التقريبي بشكل نقطي.

كمثال لهذه المعادلات:

$$\varphi'(x) + \varphi(x) + A\varphi(x) = f(x), \quad \varphi(0) = 0$$

حيث **A:** مؤثر تكاملي خطي لفريدوم معرف في فضاء بناخ.

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

مع العلم أن طرق التصنيف تعد تقنية فعالة بإستعمال البرمجة (**Matlab**)

النتائج المحصل عليها تقارن مع الحل الدقيق.

الكلمات المفتاحية:

1- المعادلات التفاضلية .

2- معادلات تفاتكاملية .

3- طرق التصنيف .

4- تقدير الأخطاء .

Abstract

In this work, we are going to propose numeric methods of resolution Fredholm integro-differentials equations of second kind, these methods rest on an approximation of the continous or weakly continuous kernel by a kernel of finished rank, that allow to get the solution in discrete form, the obtain results must be compared with the exact solution with a high precision .

Fredholm integro-differential equation treated in large scientific space, the applied mathematics in particular through the numeric solutions of this type of equations of the form :

$$\varphi'(t) + \varphi(t) + A\varphi(t) = f(t) \quad with \quad \varphi(0) = 0.$$

were A : desinates a integral operator of Fredholm type in Banach space .

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

the collocation method presents a remarkable technical with its programation in Matlab.

Key words :

- **Differentials equations**
- **Fredholm integro-differentials equations**
- **Collocation methods**
- **Errors estimates**

Résumé

Dans ce travail, on propose des méthodes numériques de résolution des équations intégro-différentielles de deuxième espèce du Fredholm. Ces méthodes reposent sur une approximation du noyau continu ou faiblement continu de l'équation par un noyau de rang fini qui permet d'obtenir la solution sous forme discrétisée.
Les résultats obtenus doivent être comparés avec les solutions exactes avec une grande précision.
l'équation intégro-différentielle du type Fredholm traitée dans un large espace scientifique en particulier le domaine des mathématiques appliquées à travers les solutions numériques comme exemple ce type d'équations du forme :

$$\varphi'(x) + \varphi(x) + A\varphi(x) = f(x) \quad avec \quad \varphi(0) = 0.$$

où A désigne un opérateur intégral du type Fredholm défini sur espace de Banach .

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Notons que la méthode de collocation présente une technique remarquable avec sa programation en matlab.

Mots clés :

- **Equations différentielles**
- **Equations intégro-différentielle de Fredholm**
- **Méthodes de collocation**
- **Estimation d'erreurs**

Table des matières

Introduction

Les équations intégro-différentielles s'inscrit comme un des problèmes les plus appliqués où les opérateurs différentiels et intégrals apparaîtrons dans la même équation, ce type d'équations a été introduit par Volterra pour le première fois dans le début des années 1900, Volterra a examiné l'augmentation de la population. Consiste son étude sur les influences héréditaires où à travers sa recherche le sujet de (E.I-D) a été établie, le deuxième limite de l'intégration est variable .
Notre présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique, le but est de trouver résolution numérique des (E.I-D) de Fredholm où les deux limites de l'intérgation sont fixés, ainsi notre thèse se compose en quatre chapitres .

Le premier chapitre :

Aborde des notions et résultats préliminaires sur qulques définitions, et rappel sur les équations intégrales ainsi des méthodes numériques des résolution des équations intégrales de Fredholm de 2^{eme} éspèce, nous intéressont aux méthodes de nyström et collocation, rappels sur les équations différentiels, ainsi de problème aux limites

Le deuxième chapitre :

Nous donnons une introduction sur les (E.I-D) ainsi classification, le théorème de point fixe assure que certains conditions l'opérateur T admet un point fixe unique où l'équation intégro-différentielle admette un solution unique .

Le troisième chapitre :

Est consacré aux méthodes sophistiqués exactes de résolution des (E.I-D) de Fredholm, nous intéressons sur les équations qui impliquent des noyaux degénérées, telles que la méthode de computation direct, et méthode de décomposition, ainsi que méthode de conversion une (E.I-D) de Fredholm à une (E.I) de Fredholm, où cette dernière méthode est applicable que si les (E.I-D) de Fredholm implique la fonction inconnue φ seulement et pas une de ses dérivée sous la signe de l'intégration .

Le quatrième chapitre :

On ne peut pas résoudre tous les types de l'(E.I-D) de Fredholm avec les méthodes analytiques, alors on a besoins de chercher d'autre méthodes de résolution dite numériques, en se basant sur la méthode de collocation telle que les solutions approchées sont données sous forme de séries de polynômes de Bessel à la fois et sous la forme de séries de Taylor d'autre fois .

les méthodes de collocation seraient conjuguées avec des exemples, en estimant les erreurs pour les deux méthodes de comparer les solutions approchées avec la solution exacte par programmation en matlab.

Chapitre 0

Notations et résultats préliminaires

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.
(E.I-D) : Equation intégro-différentielle .
(E.I) : Equation intégrale.
$C(G)$: espace des fonctions continues définies sur une ensemble compacte $G \subset \mathbb{R}^n$, muni de la norme

$$\|\varphi\| = \max_{x \in G} |\varphi(x)|$$

Soit G un ensemble compacte de $\mathbb{R}^n$ et k une fonction continue de $G \times G$, alors on associe à chaque noyau $k(x,t)$ l'opérateur intégrale A de $C(G)$ dans $C(G)$, défini par :

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,t)\varphi(t)dt. \qquad (\varphi \in C(G));$$

et sa norme est donnée par :

$$\|A\|_{C(G)} \sim \|A\|_\infty = \max_{x \in G} \int_G |k(x,t)|dt$$

Les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré n associé avec f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ est :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

où $l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$, pour $0 \leq i \leq n$, telle que :

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, si & i = j \\ 0, si & i \neq j \end{cases}$$

Soit T un opérateur, on pose $T^n = \underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}$ n fois.

1. L'espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est dit complet si toute suite de cauchy de $(E, \|\|)$ est convergente .
2. Plus généralement, une partie U d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est complet si toute suite de cauchy d'éléments de U converege vers un élément de U.

3. Tout espace vectoriel normé et complet est dit de Banach
4. Tout espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie est compact .
5. L'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeur dans $\mathbb{E}$, noté $C([a, b], \mathbb{E})$ muni de la norme $\|\|_\infty$
   Si $E = \mathbb{R}$ les intervalles de la forme $[a, b], [a, +\infty[,] - \infty, a]$ sont des parties complètes de $(\mathbb{R}, ||)$.

[7].

Définition 0.0.1 *Une ensemble $S \subset C(G)$ est dite bornée, s'il existe un constant $M > 0$ telle que :*

$$|\varphi(x)| \leq M, \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad x \in G \qquad \textit{et} \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad \varphi \in S$$

Définition 0.0.2 *Une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est dite Lipschitzienne sur U si :$\exists L > 0$ telle que : $\forall u, v \in U$: $\|f(u) - f(v)\|_F \leq L\|u - v\|_E$, on dit que f est lipschitzienne sur U, L est appelée constant de Lipschitz.*

Définition 0.0.3 *Si la constant L est strictement plus petite que 1 la fonction f est dite contractante sur U .*

Proposition 0.0.1 *Une fonction lipschitzienne sur U est continue sur U.*

Ensembles relativement compacts

Une ensemble $G \subset E$ est relativement compacte si pour toute suite φ_n de G, il existe une sous suite $\varphi_{n(k)}$ qui converge dans E

Opérateurs compacts

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie toute ensemble bornée dans E à une ensemble relativement compacte dans F.

Approximation uniforme d'une fonction continue par un polynôme

En posant :

$$\sigma_n(f, x) = \frac{s_0(f, x) + s_1(f, x) + ... + s_{n-1}(f, x)}{n}$$

$\{s_n(f, x)\}$ étant la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f (en x).

Corollaire 0.0.1 *[6]*
Si une fonction périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est partout continue, alors :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(f, x) - f(x)| = 0$$

convergence uniforme de la suite $\{\sigma_n(f, .)\}$ sur $\mathbb{R}$ vers f .

Théorème 0.1 ***de Weirstrass*** *[6]*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que .

$$\forall x \in [a,b] : \quad |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Preuve — Prolongeons f sur $[2a-b, b]$ de façon paire, c'est-à-dire en posant :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & si \quad a \leq x \leq b \\ f(2a-x), & 2a-b \leq x \leq a. \end{cases}$$

La fonction f_1 est évidemment continue et vérifie $f_1(2a-b) = f_1(b)$. Elle est donc prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue $\widetilde{f_1}$ de période $2(b-a)$.
Soit $\varepsilon > 0$.D'après le corollaire 0.0.1, il existe $\sigma_n(\widetilde{f_1}, .)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : |\widetilde{f_1}(x) - \sigma_n(\widetilde{f_1}, x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Observons maintenant que $\sigma_n(\widetilde{f_1}, .)$ est un polynôme trigonometrique c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme

$$\sigma_n(\widetilde{f_1}, x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cos \frac{k\pi x}{b-a} + B_k \sin \frac{k\pi x}{b-a}.$$

les fonctions sin et cos étant développables en séries de Taylor sur $\mathbb{R}$, on conclut que $\sigma_n(\widetilde{f_1}, .)$ est encore développable en séries de Taylor convergeant uniformément sur chaque intervalle compact, notamment sur $[a,b]$. Il existe donc un polynôme algèbrique p (somme partielle de la série de Taylor de $\sigma_n(\widetilde{f_1}, .)$) tel que :

$$\forall x \in [a,b] : |\sigma_n(\widetilde{f_1}, x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Compte tenu du faite que $\widetilde{f_1}(x) = f(x)$ pour $x \in [a,b]$ les relations 1 et 2 implique :

$$\forall x \in [a,b] : |f(x) - p(x)| \leq |f(x) - \sigma_n(\widetilde{f_1}, x)| + |\sigma_n(\widetilde{f_1}, x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

■

théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve — Si f est constante sur $[a,b]$, le résultat est trivial : $\forall x \in [a,b] : f'(x) = 0$. Si f n'est pas constante, étant continue sur $[a,b]$, elle y est bornée et l'on peut supposer l'une ou moins des bornes, la borne supérieure M par exemple, distincte de $f(a) = f(b)$. Il existe alors un point $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$.
La valeur $f(c)$ est donc un maximum relatif et, puisque $f'(c)$ existe, on a $f'(c) = 0$.

Cas particulier .
Si $f(a) = f(b) = 0$ le théorème de Rolle s'énonce : entre deux zéros de la fonction f dérivable, il existe au moins un zéros de la fonction dérivée f'. ■

La formule de Taylor avec reste généralisé

Définition 0.0.4 *Soit f une fonction de classe C^{∞} dans un voisinage du point x_0. La série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

S'appelle série de Taylor de f au voisinage de x_0.
Si $x_0 = 0$, cette série s'appelle encore série de Maclaurin.

Théorème 0.2 *([6]) Soit f une fonction de classe C^{∞} dans l'intervalle $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.pour que l'on ait*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

Dans Δ il faut, et il suffit, que :

$$\forall x \in \Delta : \lim_{n \longrightarrow +\infty} R_n(x) = 0,$$

Où $R_n(x)$ est le reste dans la formule de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Preuve — Le faite que :$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^n + R_n(x)$, et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} R_n(x) = 0$
Implique que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + R_n(x) \Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

La proposition suivante fournit une condition suffisante pour qu'une fonction puisse être dévelloppée en série de Taylor .

Proposition 0.0.2 *[6] Soit f une fonction de classe C^{∞} dans $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, s'il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\forall x \in \Delta : \forall n, |f^{(n)}(x)| \leq M$$

Alors :

$$\forall x \in \Delta : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

En représentant le reste R_n de la formule de Taylor sous forme de lagrange, on aura la majoration :

$$\forall x \in \Delta : |R_n(x)| = \Big| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^n \Big| \leq \frac{M\delta^{n+1}}{(n + 1)!}$$

L'affirmation résulte du théorème précédente car : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ■

Equation de Bessel :([4])

L'equation de Bessel dans sa forme standard est :

$$x^2\varphi'' + x\varphi' + (x^2 - p^2)\varphi = 0 \tag{3}$$

Où p est une constante (pas nécessairement entière) appelée ordre de la fonction de Bessel.
3 exprimée simplement par :

$$x(x\varphi')' + (x^2 - p^2)\varphi = 0 \tag{4}$$

En résoudre cette équation par les séries entière, on fait appel à la méthode de frobinus utilisant des séries de la forme :

$$\varphi = x^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Dite séries entières généralisées, où s est un nombre à déterminer.
On pose $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s}$, substituons dans 4 on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^2 x^{n+s} = 0$$

En faisant la somme et en identifiant, on obtient pour le coefficient de x^s.
$s^2 - p^2 = 0$ implique que : $s = \pm p$.
Notons qu'on a supposé : $a_0 \neq 0$: pour faire apparaitre le terme x^s :
le coefficient de x^{s+1} donne, $a_1 = 0$, et le coefficient de x^{s+2} donne a_2 en fonction de a_0,etc,...
En général :

$$[(n+s)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0 \quad implique \quad que \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2}$$

On va d'abord déterminer les coefficients dans le cas $s = p$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+p)^2 - p^2} = \frac{-a_{n-2}}{n^2 + 2np} = \frac{-a_{n-2}}{n(n+2p)}$$

Comme $a_1 = 0$,alors tous les a_{2n+1} sont nuls, on a :

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+2p)} = \frac{-a_{2n-2}}{2^2 n(n+p)} \tag{5}$$

On a $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ pour tout p
Ainsi : $\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1)$, $\Gamma(p+3) = (p+2)\Gamma(p+2) = (p+2)(p+1)\Gamma(p+1)$
De l'équation 5 on trouve :

$a_2 = \frac{-a_0}{2^2(1+p)} = \frac{-a_0\Gamma(1+p)}{2^2(2+p)}$

$a_4 = \frac{-a_2}{2^3(2+p)} = \frac{a_0}{2!2^4(1+p)(2+p)} = \frac{a_0\Gamma(1+p)}{2!2^4\Gamma(3+p)}$

$a_6 = \frac{-a_4}{3!2(3+p)} = \frac{-a_0}{3!2^6(1+p)(2+p)(3+p)} = \frac{-a_0\Gamma(1+p)}{3!2^6}$

et ainsi de suite la série solution (pour le cas $s = p$) est appellée fonction de Bessel de première espèce et on le note $J_p(x)$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} (\frac{x}{2})^{2n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} (\frac{x}{2})^{2n+p} \tag{6}$$

Pour trouver la seconde solution, il suffit de remplacer p par $-p$ dans 6
que l'on notera J_{-p} :

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} (\frac{x}{2})^{2n-p}$$

Si p n'est pas entier, $J_p(x)$ est une série commençant par le terme x^p et $J_{-p}(x)$ commençant par x^{-p}.
$J_p(x)$ et $J_{-p}(x)$ sont donc deux solutions indépendantes et le combinaison linéaire de les deux est une solution générale .
On a $J_{-p}(x) = (-1)^n J_p(x)$, pour p entier.
$J_p(x)$ est finie à l'origine, mais la seconde solution $J_{-p}(x)$ est infinie
La fonction de Bessel de seconde espèce est :

$$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos p\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$$

La solution générale de l'équation de Bessel est :$AJ_p(x) + BN_p(x)$, A, B sont des constants arbitraires.

Chapitre 1

Equations intégrales et équations différentielles

1.1 Equations intégrales et leur classification :

Voir.[11]

Définition 1.1.1 *: Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$. la forme générale d'une équation intégrale est :*

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_E K(x,t,\varphi(t))dt. \tag{1.1}$$

où E une ensemble fermée, bornée et mesurable d'une espace euclidien de dimension n
(x et t des point de cet espace).
λ est un paramètre numérique .
$f(x)$: une fonction donnée.
$K(x,t,\varphi(t))$ est le noyau de l'équation intégrale .
$\varphi(x)$ la fonction inconnue .
On dit que une équation intégrale est linéaire si : $K(x,t,\varphi(t)) = K(x,t).\varphi(t)$ nous étidierons le cas unidimensionnel (i.e. les variables x et t parcourent un intervalle $[a,b]$). alors la forme général d'une équation intégral linéaire est :

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_E K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Une importante classification des équations intégrales existe, et sont classées par leur caractéristique selon trois genères

Limites d'intégration :

L'équation 1.1 est dite de Fredholm si les deux limites d'intégration sont fixées on écrit :

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (a \le x,t \le b)$$

Si $b = x$ l'équation 1.1 est dite de Volterra et on écrit :

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Placement du fonction inconnue φ :

Si $\lambda = 0$ on a $f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$ et $f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$, sont respectivement les équations de Fredholm et Volterra de première espèce.
si $\lambda \neq 0$ on a $\lambda\varphi(x)+f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$ et $\lambda\varphi(x)+f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$, sont respectivement les équations de Fredholm et Volterra de deuxième espèce.

Placement du fonction connue f :

Si $f \equiv 0$ l'équation 1.1 est dite homogène, sinon elle est dite nonhomogène .

Définition 1.1.2 *On dit qu'une équation intégrale est singulière si le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale, ou bien l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies .*

1.1.1 Opérateur intégral linéaire :

Définition 1.1.3 *Soit :K : $C(G) \times C(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et G une ensemble compacte .*
L'opérateur intégral linéaire sur $C(G)$ est défini par :

$$A : \varphi \in C(G) \longrightarrow A\varphi \in C(G).$$

$$A(\varphi)(x) = \int_G K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Où : K s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A .

Théorème 1.1 *[7] Soit G une ensemble compacte de $\mathbb{R}^n$ et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans $\mathbb{C}$. Alors l'opérateur linéaire A défini de $C(G)$ dans $C(G)$ par :*

$$A\varphi(x) = \int_G K(x,t)\varphi(t)dt. \quad x \in G \tag{1.2}$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K. Cet opérateur est borné de norme : $\|A\|$ donnée par :

$$\|A\| = \max_{x\in G} \int_G \mid K(x,t) \mid dt$$

Preuve —
Il est claire que l'opérateur A définie par 1.2 est linéaire pour tout $\varphi \in C(G)$ de plus pour $\|\varphi\| \leq 1$, on a

$$|A\varphi(x)| \leq \int_G |K(x,t)|dt, \quad x \in G.$$

d'où

$$\|A\| = \max_{\|\varphi\|\leq 1} |A\varphi(t)| \leq \max_{x\in G} \int_G |K(x,t)|dt.$$

Le fait que le noyau K est continu, on peut trouver un élément $x_0 \in G$. Telle que

$$\int_G |K(x_0,t)|dt = \max_{x\in G} \int_G |K(x,t)|dt.$$

D'où pour $\varepsilon > 0$. On choisi une fonction $\psi \in C(G)$ par l'expression

$$\psi(t) = \frac{\overline{K(x_0,t)}}{|K(x_0,t)| + \varepsilon}, \quad t \in G$$

Alors $\|\psi\| \leq 1$, de plus

$$\begin{aligned}\|A\psi\| \geq |A\psi(x_0)| &= \int_G \frac{|K(x_0,t)|^2}{|K(x_0,t)| + \varepsilon} dt \geq \int_G \frac{|K(x_0,t)|^2 - \varepsilon^2}{|K(x_0,t)| + \varepsilon} dt \\ &= \int_G |K(x_0,t)|dt - \varepsilon|G|\end{aligned}$$

Donc

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |A\varphi| \geq \|A\psi\| \geq \int_G |K(x_0,t)|dt - \varepsilon|G|$$

Cette inégalité reste vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on fait tendre ε vers 0, on obtient

$$\|A\| \geq \int_G |K(x_0,t)|dt = \max_{x\in G} \int_G |K(x,t)|dt.$$

$\blacksquare$

1.1.2 Alternative de Fredholm

Théorème 1.2 *([7]) On considère les équations intégrales homogènes duales , l'une de l'autre issues d'une noyau $K : [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, qui sont donc définies par*

$$Trouver \quad \varphi \in C[a,b] \quad tel \quad que \quad \varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (1.3)$$

$$Trouver \quad \psi \in C[a,b] \quad tel \quad que \quad \psi(x) - \int_a^b K(t,x)\psi(t)dt = 0 \qquad (1.4)$$

On considère pour $f \in C[a,b]$et $g \in C[a,b]$ les équations intégrales avec secondes membres

$$Trouver \quad \varphi \in C[a,b] \quad tel \quad que \quad \varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (1.5)$$

$$Trouver \quad \psi \in C[a,b] \quad tel \quad que \quad \psi(x) - \int_a^b K(t,x)\psi(t)dt = g(x) \qquad (1.6)$$

Alors on a l'alternative :

1. *Les équations 1.3 et 1.4 n'ont que les solutions triviales $\varphi \equiv 0$ et $\psi \equiv 0$, et dans ces cas les équations 1.5 et 1.6 admettent une solution unique $\varphi \in C[a,b]$ et $\psi \in C[a,b]$ pour chaque $f \in C[a,b]$ et $g \in C[a,b]$.*
2. *Les équation 1.3 et 1.4 ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations 1.5 et 1.6 sont résolubles si et seulement si pour toute solution φ de 1.3 et toute solution ψ de 1.4 on a*

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx = 0 \tag{1.7}$$

Dans ces conditions, la solution générale de 1.5 s'écrite sous la forme :

$$\varphi = \widetilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i \tag{1.8}$$

Où $\widetilde{\varphi}$ est une solution particulière de 1.5 et les $(\varphi_i)_{0\leq i\leq m}$ forme une famille libre de solution de 1.3

1.2 Méthodes numériques des résolutions des équations intégrales de Fredholm de 2^{eme} éspèce :

Interpolation polynômiale de lagrange : ([11])

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et soit :

$$\Delta : a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b,$$

Une partition de l'intervalle $[a,b]$, alors on choisi $V = C([a,b])$, l'espace des fonctions continues : $V_{n+1} = P_n$, l'espace des polynômes de degré plus n. Alors l'interpolation de lagrange de degré n de la fonction f est défini par :

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad p_n \in P_n.$$

L'interpolation fonctionnelle linéaire est donnée par :

$$L_i f = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

On choisi $\nu_j(x) = x^j$,$0 \leq j \leq n$ comme base de P_n, alors

$$det(L_i \nu_j)_{(n+1)\times(n+1)} = \prod_{j>i}(x_j - x_i) \neq 0,$$

est appelé déterminant de Vandermonde, telle que les formules

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\phi_i(x), \qquad \phi_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

Sont appelées les formules d'interpolation polynômiale de Lagrange.

1.2.1 Méthodes de Nyström :

a) Principe des méthodes de nyström :

Les méthode de Nyström utilisant les formules des quadratures consistent à construire la solution d'une équation intégrale en se basant sur la formule suivante :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi(x_i) + \varepsilon_n[\varphi], \tag{1.9}$$

Telle que : $x_i(i = 1, 2, ..., n)$:Les nœuds d'interpolation de la quadrature .
$A_i(i = 1, 2, ..., n)$:Les coefficients numériques indépendants de $\varphi(x)$
$\varepsilon_n[\varphi]$: L'erreur de troncateur de la formule 1.9 , telle que :

$$A_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = b - a$$

1. Pour la règle des trapèzes on a :

$$A_1 = A_n = \frac{1}{2}h, \quad A_2 = A_3 = ... = A_{n-1} = h$$

$$h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{2(n-1)}(\varphi(a) + \varphi(b)) + \frac{b-a}{n-1}\sum_{i=2}^{i=n-1}\varphi(a + h(i-1))$$

2. Pour la règle de Simpson on a

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{1}{3}h, \quad A_2 = ... = A_{2m} = \frac{4}{3}h, \quad A_3 = ... = A_{2m-1} = \frac{2}{3}h$$

$$h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1), \quad (n = 2m+1, i = 1, 2, ..., n)$$

3. Pour la règle des rectangles on a :

$$A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = h, \quad A_n = 0,$$

$$h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

$$et \quad \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{n-1}\sum_{i=1}^{i=n-1}\varphi(a + h(i-1))$$

b)Application de la méthode de nyström :

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de 2^{eme} espèce :

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt + f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{1.10}$$

En posant :$x = x_i, \quad (i = 1, ..., n)$ on obtient

$$\varphi(x_i) = \int_a^b K(x_i,t,\varphi(t))dt + f(x_i) \qquad a \leq x \leq b$$

Et par la formule de quadrature on obtient le système d'équations non linéaires

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}(\varphi_j) + f_i, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Et on déduit la solution approximative de l'équation 1.10 donnée par :

$$\widetilde{\varphi}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j, \varphi_j)$$

Pour le cas linéaire,

$$K(x,t,\varphi(t)) = K(x,t)\varphi(t)$$

On aura comme cas particulier :

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} \varphi_j + f_i, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) + f(x)$$

1.2.2 Méthodes de projection :

a) Principe des méthodes de projection :

Dans toutes les méthodes de projection,on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce de la forme

$$\lambda\varphi(x) - \int_D K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (x \in D) \tag{1.11}$$

L'ensemble D est fermé et borné d'un espace complet de fonctions V, tel que $V = C(D)$ ou $V = L^2(D)$ presque partout.On choisi une séquence finie d'approximation de sous espace V_n, tel que $V_n \subset V, n \geq 1$, et V_n de dimension K_n. Soit la base $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k)$ de V_n, $(k = k_n)$, alors le principe du méthode de projection consiste à trouver une suite de fonctions $\varphi_n \in V_n$, tel que .

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x), \quad x \in D$$

On introduit le résidu $r_n(x)$ pour approcher la solution de 1.11

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \lambda\varphi_n(x) - \int_D K(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k} c_j\{\lambda\phi_j(x) - \int_D K(x,t)\phi_j(t)dt\} - f(x), \end{aligned}$$

On note cette approximation par $\varphi \approx \varphi_n$. L'équation 1.11 qui peut être écrité sous la forme de notation d'opérateur,tel que

$$(\lambda - K)\varphi = f$$

et le résidu r_n peut être écrite sous forme

$$r_n = (\lambda - K)\varphi_n - f.$$

Les coefficients $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ doivent être choisi de telle sorte que

$$r_n(x) \longrightarrow 0.$$

b) Application des méthodes de projection :

Méthodes de collocation :

Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce 1.11, on va choisir des nœuds de points distincts $x_1, x_2, ..., x_k \in D$ telle que

$$r_n(x_i) = 0, (i = 1, ..., k_n)$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\{\lambda\phi_j(x_i) - \int_D K(x_i,t)\phi_j(t)dt\} = f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., k \tag{1.12}$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\lambda\phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k} c_j \int_D K(x_i,t)\phi_j(t)dt + f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., k$$

et puisque $P_n\varphi(x) = \lambda\varphi_n(x) = \lambda\sum_{j=1}^{k_n} c_j\phi_j(x)$, alors

$$P_n\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_D c_jK(x_i,t)\phi_j(t)dt + f(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j\lambda\phi_j(x_i),$$

En posant $\alpha_j = c_j\lambda$, alors l'équation 1.12, peut être écrite sous la forme :

$$P_n\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j\phi_j(x),$$

Telle que $x \in C(D)$, et $P_n : V = C(D) \longrightarrow V_n$, est un opérateur de projection, et pour déterminer les coefficients α_i, on résout le système

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x_i) = \varphi(x_i), \quad i = 1, 2, ..., k_n,$$

Ce système admet une seule solution si et seulement si

$$det[\phi_j(x_i)] = \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_1(x_n) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(x_1) & \phi_n(x_2) & \dots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Il faut noter que cette condition implique que le système des fonctions $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{k_n}\}$ constitue un système linéairement indépendant

b-2) Application des Méthodes de collocation :

Si on considère le système $\{1, x, ..., x^n\}$ des monômes linéairement indépendants, alors on obtient le déterminant de vandermonde.
pour tout $i, (1 \leq i \leq k_n)$, Soit $\ell_i \in V_n$, telle que :

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si \quad i = j; \\ 0, & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

D'où

$$P_n\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(x_j)\ell_j(x), \quad x \in D.$$

Le système $\{\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k\}$ est appelé la base des fonctions de lagrange vérifiant :

$$\|P_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{k_n} \ell_j(x).$$

Si on prend $V_n = span\{1, x, ..., x^n\}$, alors la base des fonctions de Lagrange est donnée par :

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, i \neq j}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad (i = 0, 1, ..., n)$$

1.3 Equations différentielles

Définition 1.3.1 *Une équation différentielle E.D est une équation qui implique une fonction inconnue φ et ses dérivées, $\varphi', \varphi'', ..., \varphi^{(n)}$.*

1.3.1 Problèmes aux valeurs initiales

soit le E.D.O,sous une forme résolue en $\varphi_x^{(n)}$

$$\varphi_x^{(n)} = f(x, \varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)}) \tag{1.13}$$

La solution générale de l'équation 1.13, dépend de n constantes arbitraires : $C_1, C_2, ..., C_n$, telle que :

$$\varphi = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Le problème de cauchy consiste à trouver la solution de l'équation 1.13 avec les conditions initiales suivantes :

$$\varphi(x_0) = \varphi_0, \quad \varphi_x'(x_0) = \varphi_0^{(1)}, \quad ... \quad , \varphi_x^{(n-1)}(x_0) = \varphi_0^{(n-1)} \tag{1.14}$$

1.3.1.1 Existence et unicité de la solution d'une E.D.O

On considère un intervalle réelle $I = [x_0, x_0 + a]$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et on introduit une fonction f définie sur $I \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on cherche une fonction f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ admettant une dérivée φ' et telle que pour tout $x \in I$, l'équation différentielle .

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)). \tag{1.15}$$

Soit vérifiée. Cette fonction φ est appelée une solution, quelquefois une intégrale de l'équation différentielle .
La donnée de f est en fait la donnée de n fonctions f_i, que l'on supposera continues sur $I \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la solution φ correspond donc ainsi à n fonctions $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R})$ l'équation 1.15 correspond ainsi à un système différentiel de n équations

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)).$$

Les équations précédentes sont dites du premier ordre, car seules des dérivées d'ordre un interviennent.Dans le cas général, on aurait à l'ordre p(p entier) le système d'équations suivant :

$$\varphi^{(p)}(x) = f(x, \varphi', ..., \varphi^{(p-1)}).$$

Où φ est toujours définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on peut se ramener à système d'ordre un en posant successivement

$$z_1 = \varphi, z_2 = \varphi', ..., z_p = \varphi^{(p-1)}.$$

Pour obtenir le système de p équations

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{p-1}' = z_p \\ z_p' = f(x, z_1, z_2, ..., z_p) \end{cases}$$

On appelle condition de cauchy la donnée d'une valeur $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\varphi(x_0) = \varphi_0 \tag{1.16}$$

Pour une équation d'ordre p, compte tenu de son écriture sous la forme d'un système de premier ordre cette condition correspond à la donnée de $(\varphi_0, \varphi_0', ..., \varphi_0^{(p-1)}) \in \mathbb{R}^p$, Soit la valeur de φ et de ses $p-1$ dérivées en x_0, on va montrer que moyennant une condition de régularité sur f, le problème de Cauchy de l'équation différentielle 1.15 et les conditions de Cauchy 1.16 admet une seule solution unique. On note $| \, . \, |$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, et on munit $E = C(I, \mathbb{R}^n)$ de la norme uniforme

$$\|u\|_E = \sup_{x \in I} | \, u(x) \, |_{\mathbb{R}^n} \, .$$

Rappelons que E, muni de cette norme est une espace de Banach.

Théorème 1.3 *[11] Si f vérifie la condition de Lipschitz, alors le problème de Cauchy 1.15-1.16 admet une solution unique $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Preuve —
En intégrant 1.15, entre x_0 et x on obtient :

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \tag{1.17}$$

Réciproquement si $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, on retrouve bien 1.15 en dérivant 1.17 et on retrouve 1.16 en faisant $x = x_0$. Ainsi l'équation intégrale 1.17 caractérise la solution du problème de Cauchy 1.15-1.16, et on s'intéresse donc à φ vérifiant 1.17. On pose pour $u \in E$.

$$\phi(u)(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, u(\xi)) d\xi \tag{1.18}$$

On définit ainsi une application ϕ de E dans E, et la fonction φ cherchée est solution de

$$\varphi = \phi(\varphi) \tag{1.19}$$

C'est une équation de type point fixe.

Unicité :

Si u vérifie $u = \phi(u)$, on a aussi $\phi^p(u) = u$ et $\phi^{p+1}(u) = u$.
Soit u et v sont deux solutions on a :

$$\|\phi(u) - \phi(v)\| \leq \|\phi^{p+1}(u) - \phi^{p+1}(v)\| \leq c\|\phi(u) - \phi(v)\|$$

D'où $(1-c)\|\phi(u) - \phi(v)\| \leq 0$, et alors $\phi(u) = \phi(v)$ c'est-à-dire $u = v$

Existence :

On se donne $u_0 \in E$,et on construit :

$$u_1 = \phi^p(u_0), u_2 = \phi^p(u_1), ..., u_n = \phi^p(u_{n-1}).$$

Alors :

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq c\|u_m - u_{m-1}\| \leq c^2\|u_{m-1} - u_{m-2}\| \leq ... \leq c^m\|u_1 - u_0\|$$

Et

$$\begin{aligned}
\|u_{m+k}-u_m\| &= \|(u_{m+k}-u_{m+k-1})+(u_{m+k-1}-u_{m+k-2})+...+(u_{m+1}-u_m)\| \\
&\leq \|u_{m+k}-u_{m+k-1}\|+\|u_{m+k-1}-u_{m+k-2}\|+...+\|u_{m+1}-u_m\| \\
&\leq c^m(c^{k-1}+c^{k-2}+...+c+1)\|u_1-u_0\| \leq \frac{c^m}{1-c}\|u_1-u_0\|.
\end{aligned}$$

Donc $\|u_{m+k}-u_m\|$ tend vers zéro lorsque m tend vers $+\infty$. La suite (u_n) est de Cauchy dans E donc converge. On note u sa limite qui vérifie nécessairement $\phi^p(u) = u$.or

$$\|\phi(u)-u\| \leq \|\phi^{p+1}(u)-\phi^p(u)\| \leq c\|\phi(u)-u\|$$

Donc $(1-c)\|\phi(u)-u\| \leq 0$, d'où $\phi(u) = u$ et u est bien solution de 1.19

■

Un formalisme encore plus compact réunit en une seule équation intégrale, le système différentiel et sa condition initiale par théorème suivante :

Théorème 1.4 *[11] Soit $f : U \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, définie sur le produit d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'équation différentielle :*

$$\varphi' = f(\varphi(t), t),$$

qui passe par φ_0 à $t = 0$, est équivalente à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(\tau), \tau)d\tau$$

Il est alors tenter de substituer l'expression de $\varphi(t)$, sous l'intégrale et de générer ainsi la suite des approximations de Picard. Partant d'une fonction d'essai $\varphi^{(0)}(t)$ (un choix courant consiste à prendre la condition initiale $\varphi^{(0)}(t) = \varphi_0$),l'itération d'ordre (p) est générer à partir de la précédente par la relation

$$\varphi^{(p)}(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi^{(p-1)}(\tau), \tau)d\tau.$$

Le problème est évidemment de savoir si la suite ainsi générer converge vers une fonction solution du système différentiel étudiée et si cette solution est unique.

1.3.2 Problèmes aux limites :

Définition 1.3.2 *Soit le E.D.O sous forme canonique résolue en $\varphi^{(n)}$.*

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \tag{1.20}$$

Le problème aux limites à trouver pour chaque $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} = b$, la solution de l'équation 1.20 avec les conditions aux bornes suivantes :

$$\varphi(x_0) = \varphi_0, \quad \varphi(x_1) = \varphi_1, \quad ... \quad , \quad \varphi(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}.$$

Chapitre 2

Equations intégro-différentielles

2.1 Equations intégro-différentielles

2.1.1 Introduction

Les équations intégro-différentielles (E.I-D) est une branche importante de mathématique modèrne et survient fréquemment dans becaucoup de domaines appliqués, qui incluent mécanique de l'ingénieur, physiques, chimies, astronomies, biologies, économies, théorie potentielle et électrostatique.
Une (E.I-D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnue φ .
Nous intéressons dans ce chapitre aux types les plus simples qui concerne les (E.I-D) unidimentionnelle (la fonction inconnue φ depende d'un variable) .
la forme générale d'une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre n est :

$$\varphi^{(n)}(x) = F\Big(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x), \lambda \int_E K\big(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\big) dt\Big) \tag{2.1}$$

([16])
Avec les conditions initiales :

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \quad \varphi'(\alpha) = \beta_1, \quad \varphi''(\alpha) = \beta_2, ..., \quad \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

Telle que :$\alpha \in T$ et ($\beta_i \quad 0 \le i \le n-1$) nombres donnés
$\varphi, \varphi', \varphi', ..., \varphi^{(n)}$ sont des fonctions inconnues .
K : noyau de l'équation intégro-différentielle.
E : un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimention fini,(x et t des éléments de cet espace).
n et m des numbres naturels.
λ : est paramètre numérique .
La forme linéaire d'une (E.I-D) d'ordre n est :

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_T K(x, t) M_t(\varphi) + f(x) \tag{2.2}$$

Où :

$$L_x(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \varphi^{(i)}(x) \quad et \quad M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t) \varphi^{(j)}(t).$$

$a_i(x)$ et $b_j(x)$ et$f(x)$ sont des fonctions données et $(0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m)$.[8], et[9].
L'intégration de 2.1 une fois nous obtenons :

$$\varphi^{(n-1)}(x) = \beta_{n-1} + \int_T F(t, \varphi(t), ..., \varphi^{n-1}(t), Z_n(t))dt.$$

Où :

$$Z_n(x) = \lambda \int_T K(x, t, \varphi(t), ..., \varphi^{n-1}(t))dt.$$

Si l'on introduit $z_i = \varphi^{(i)}, i = 0, 1, ..., n-1.$, on arrive au système :

$$Z_n(x) = \lambda \int_T K(x, t, Z_0(t), ..., Z_{n-1}(t))dt.$$

$$Z_{n-1}(x) = \beta_{n-1} + \int_T F(t, Z_0(t), ..., Z_{n-1}(t), Z_n(t))dt.$$

Finalement : $Z_i(x) = \beta_i + \int_T Z_{i+1}(t)dt, i = 0, 1, ..., n-2.$
Numériqument cette dernières peut être résolue avec l'une des techniques décrites dans premier chapitre .[16]

2.1.2 Classification de (E.I-D) :

Une importante classification des (E.I-D) existe, et sont classées par leur caractéristiques en cinq types suivants :

1. **Les limites de l'integration**
   On distingue trois types majeurs de l'equations intégro-difféditilles

   - **a)** Si les limites de l'intégrations sont fixés, alors l'(E.I-D) est dite de Fredholm :
   $$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^b K(x, t)M_t(\varphi) + f(x)$$
   - **b)** Si $b = x$ alors l'E.I-D est dite de Volterra :
   $$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^x K(x, t)M_t(\varphi) + f(x)$$
   - **c)** Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l'(E.I-D) est dite de Fredholm-Volterra .[14] et [2]
   $$L_x(\varphi) = \lambda_1 \int_a^b K_1(x, t)M_t(\varphi) + \lambda_2 \int_a^x K_2(x, t)M_t(\varphi) + f(x)$$
2. **Ordre de (E.I-D)**
   L'ordre d'une (E.I-D) est l'ordre de plus haute dérivée qui apparaît dans l'opérateur différentiel .
3. **Linéaire ou non linéaire**
   Le (E.I-D) est dite non linéaire sous la forme 2.1 ou linéaire sous la forme 2.2

4. **Première ou deuxième espèce**
   Le (E.I-D) est dite de première espèce si la partie différentiel est nul, sinon est dite de deuxième espèce. [8]
5. **Nombre de variable de la fonction inconnue φ**
   Une (E.I-D) est dite ordinnaire si la fonction inconnue dépende d'une seule variable indépendante, alors si dépende de deux où plusieurs variables indépendantes l'(E.I-D) est dite partielle.[17]

Remarque 2.1.1 *L'équation 2.2 à coefficients constants si touts les $a_i(i = 1, 2, ..., n)$ et $b_j(j = 1, 2, ..., m)$ sont des constants. Si un ou plusieurs de ses coefficients n'est pas constants, alors 2.2 est dite à coefficients variables.*

2.1.3 Equation integro-différentielle singulier :

Une équation integro-différentielle est dite singulier si l'un ou les deux hypothèses suivantes consistent dans (E.I-D)

1. L'un ou les deux limites de l'intégration sont infinies .
2. Le noyau devient infinie au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration

Exemple :[3]

$$u(x) = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{v(x)}{t - x} dt \qquad (0 \leq x < +\infty)$$

avec

$$u = a_n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} + ... + a_0 \varphi$$

$$v = b_n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} + ... + b_0 \varphi$$

2.1.4 Convertement une (E.I-D) linéaire de haute ordre à système de E.I-D linéaire du premier ordre .

On considère l'équation intégro-différentielle linéaire d'ordre n.

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \varphi^{(n-i)}(x) + \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = g(x)$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(a) = \alpha_1, \varphi'(a) = \alpha_2, \varphi''(a) = \alpha_3, ..., \varphi^{(n-1)}(a) = \alpha_n.$$

Pour convertir un (E.I-D) d'ordre n à une système de (E.I-D) de premier ordre on pose :$\phi_1(x) = \varphi(x), \quad \phi_2(x) = \varphi'(x), ..., \phi_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$.

$$\begin{cases} \phi_1'(x) = \phi_2(x) \\ \phi_2'(x) = \phi_3(x) \\ \phi_3'(x) = \phi_4(x) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_{n-1}'(x) = \phi_n(x) \\ \phi_n'(x) = g(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\phi_{n+1-i}(x) - \int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt \end{cases}$$

Avec les conditions initiales :$\phi_1(a) = \alpha_1, \quad \phi_2(a) = \alpha_2, ..., \phi_n(a) = \alpha_n$. [1]

2.2 Théorème de point fixe

Théorème 2.1 ***(de point fixe de Banach[15])***
Soit T un opérateur contractant sur un espace de Banach X, alors T admet un point fixe unique.

Preuve —

On pose $T^n = \underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}$ n fois.
Soit φ un élément fixé arbitraire de X, et soit la suite $(T^n(\varphi))_{n\geq 1}$.
On pose

$$\varphi_n = T^n(\varphi), \qquad pour \quad n = 1, 2, ...$$

On note que :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &= \|\varphi_n - \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} + ... + \varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| + \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| ... + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &= \|T(\varphi_{n-1}) - T(\varphi_{n-2})\| + \|T(\varphi_{n-2}) - T(\varphi_{n-3})\| + ... + \|T(\varphi_m) - T(\varphi_{m-1})\| \\ &\leq L\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| + L\|\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}\| + ... + L\|\varphi_m - \varphi_{m-1}\| \\ &\vdots \\ &\leq (L^{n-1} + L^{n-2} + ... + L^{m-1})\|\varphi_1 - \varphi\| \\ &\leq \frac{L^{m-1}}{1-L}\|\varphi_1 - \varphi\| \end{aligned}$$

Pour $n > m \geq 1$, on a $\|\varphi_n - \varphi_m\| \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow +\infty$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.
Le fait que X espace de Banach, alors la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est convergente i.e. Il existe $\alpha \in X$ telle que $\varphi_n \longrightarrow \alpha$, quand $n \longrightarrow +\infty$.
Il suffit de montrer que α est un point fixe de T, alors faisons deux revendications .

1. α est un point fixe de T, c'est-à-dire : $T(\alpha) = \alpha$.
2. α est un point fixe unique de T dans X

Pour 1. nous prenous la limite des deux côtés des recurrences : $\varphi_n = T(\varphi_{n-1})$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} T(\varphi_{n-1})$$

Comme T est contractant, alors est continu donc on peut prendre la limite à l'intérieure.

$$\alpha = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n = T(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_{n-1}) = T(\alpha).$$

Pour montrer 2.on suppose que T admet deux point fixe α_1 et α_2 distincts :

$$T(\alpha_1) = \alpha_1 \quad et \quad T(\alpha_2) = \alpha_2, \quad avec \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

Comme T est contractant on a :

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\| = \|T(\alpha_1) - T(\alpha_2)\| \leq L\|\alpha_1 - \alpha_2\|$$

Alors

$$(1 - L)\|\alpha_1 - \alpha_2\| \leq 0$$

On a $\|\alpha_1 - \alpha_2\| \neq 0$, ce qu'implique $L \geq 1$. Ce qui conterdit le fait que $L < 1$, donc α est unique. ■

Théorème 2.2 *[15]*
Soit T un opérateur défini dans un espace du Banach X, telle que T^n est contractant sur X, pour un entier positif n. Alors T a un point fixe unique.

Preuve —

Le théorème du point fixe implique qu'il existe un point fixe unique pour l'opérateur T^n, on note φ_0 de cette point fixe.
Notons que :

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_0) - \varphi_0\| &= \|T(T^n(\varphi_0)) - T^n(\varphi_0)\| \\ &= \|T^n(T(\varphi_0)) - T^n(\varphi_0)\| \\ &\leq L\|T(\varphi_0) - \varphi_0\| \end{aligned}$$

Pour $0 < L < 1$, on a $T(\varphi_0) = \varphi_0$.
L'unicité est claire du faite qu'un point fixe de T est aussi point fixe de T^n. ■

2.2.1 Appliquation sur (E.I-D) de Fredholm de premier ordre :

Soit l'équation intégro-differentielle nonlinéaire de premier ordre

$$\begin{cases} \varphi'(x) = g(x) + \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in [a,b] \\ \varphi(a) = \alpha \end{cases} \tag{2.3}$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont fonctions continues
Le cas linéaire : $K(x,t,\varphi) = h(x,t)\varphi(t)$, tel que $h : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, est un cas particulier évident de l'équation 2.3.
En intégrant 2.3 entre a et x on obtient :

$$\varphi(x) = \alpha + \int_a^x g(s)ds + \int_a^x \int_a^b K(s,t,\varphi(t))dtds, \quad x \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Réciproquement si $\varphi \in C^1([a,b])$ on retrouve bien 2.3, en dérivant 2.4 et on retrouve la condition initial $\varphi(a) = \alpha$ en faisant $x = a$. Ainsi l'équation intégro-différentielle caractérise la solution du problème de Cauchy 2.3 et on s'intéresse donc à φ vérifiant 2.4.
On définit ainsi une opérateur T de $C([a,b])$ dans $C([a,b])$

$$T(\varphi)(x) = \alpha + \int_a^x g(s)ds + \int_a^x \int_a^b K(s,t,\varphi(t))dtds, \quad x \in [a,b]$$

La fonction cherchée est solution de $\varphi = T(\varphi)$, c'est une équation de type point fixe.
On se donne $\varphi_0 \in X$, et on construit la suite itérée associée $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$\varphi_1 = T(\varphi_0), \qquad \varphi_2 = T(\varphi_1), \qquad \dots \qquad , \varphi_n = T(\varphi_{n-1}).$$

On a aussi $\quad \varphi_n = T^n(\varphi)$.
On veut appliquer le théorème du point fixe à T^p (pour p bien choisi).

Lemme 2.2.1 *[10] :*
Soit u et $v \in C([a,b])$ et $L \in \mathbb{R}_+^*$ est le constant de Lipschitz de la fonction continue $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ au troisième variable de 2.3
Alors :

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!}\|u-v\|_\infty \tag{2.5}$$

Preuve —

On pose $T^p = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T} \quad p \quad fois$.
On prouve l'inégalité

$$p \geq 1, x \in [a,b] \Longrightarrow |T^p(u)(x) - T^p(v)(x)| \leq \frac{L^p(b-a)^p(x-a)^p}{p!}\|u-v\|_\infty$$

On vas preuvé par récurence pour $p = 1$ on a :

$$\begin{aligned} |T(u)(x) - T(v)(x)| &= \Big|\int_a^x \Big(\int_a^b \big(K(s,t,u(t)) - K(s,t,v(t))\big)dt\Big)ds\Big| \\ &\leq \int_a^x \Big(\int_a^b |K(s,t,u(t)) - K(s,t,v(t))|dt\Big)ds. \end{aligned}$$

Le fait que K est Lipschitzienne au troisième variable avec le constant de Lipschitz $L > 0$ pour tout $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \int_a^x \Big(\int_a^b |K(s,t,u(t)) - K(s,t,v(t))|dt\Big)ds &\leq \int_a^x \Big(\int_a^b L|u(t) - v(t)|dt\Big)ds \\ &\leq \int_a^x \Big(\int_a^b L\|u-v\|_\infty dt\Big)ds \\ &= L\|u-v\|_\infty(b-a)(x-a) \\ &\leq L\|u-v\|_\infty(b-a)^2 \end{aligned}$$

On suppose que l'inégalité proposée est valable pour $(p-1)$ et on va prouver pour p, $\forall x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}
|T^p(u)(x) - T^p(v)(x)| &= \Big| \int_a^x \Big(\int_a^b \big(K(s,t,T^{p-1}(u)(t)) - K(s,t,T^{p-1}(v)(t)) \big) dt \Big) ds \Big| \\
&\leq \int_a^x \Big(\int_a^b L \big| T^{p-1}(u)(t) - T^{p-1}(v)(t) \big| dt \Big) ds \\
&\leq \int_a^x \Big(\int_a^b L.L^{p-1} \|u-v\|_\infty \frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!} (s-a)^{p-1} dt \Big) ds \\
&= \frac{L^p (b-a)^p (x-a)^p}{p!} \|u-v\|_\infty \\
&\leq \frac{L^p (b-a)^{2p}}{p!} \|u-v\|_\infty
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence. ■

Donc T^p est lipschizienne de rapport $\frac{(L(b-a)^2)^p}{p!}$, on a :

$$\sum_{p \geq 0}^{+\infty} \frac{(L(b-a)^2)^p}{p!} = e^{L(b-a)^2}.$$

Il résulte que : $\lim_{p \longrightarrow +\infty} \frac{(L(b-a)^2)^p}{p!} = 0$.
Alors il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{(L(b-a)^2)^p}{p!} < 1$. Donc pour $n \geq p$, T^n est contractant
On déduit du théorème 2.1 que T^n admet un unique point fixe φ, de plus :

$$T^n(T(\varphi)) = T(T^n(\varphi)) = T(\varphi).$$

Donc $T(\varphi)$ est un point fixe de T^n, et par unicité du point fixe de T^n on a : $T(\varphi) = \varphi$.

Comme les points fixes de T sont des points fixes de T^n on en déduit que φ est l'unique point fixe de T .
Finalement, φ est l'unique solution de 2.3 .

Chapitre 3

Méthodes sophistiqué pour résoudre des (E.I-D) de Fredholm

Dans ce chapitre nous appuirons de manière essentielle sur (M.Rahman (2007).[12]).

Introduction

Dans ce chapitre on va présenter quelque méthodes mathématiques sophistiqués fiables utilisants pour résoudre des équations intégro-différentielles de Frédohlm . On vas intéressent aux équations qui impliquent des noyaux degénérés .

Définition 3.0.1 *Le noyau $K(x,t)$ d'une équation intégro-différentielle de Fredholm est dite degénérée s'il est la somme d'un nombre finie de produit des fonctions de variable x seul par des fonctions de variable t seul i.e il est de la forme :*

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t).$$

Les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes

Remarque 3.0.1 *Le noyau non degénéré peut réduice à noyau degénérée par développement de Taylor.*

3.1 Méthode de computation directe

3.1.1 Principe de la méthode :

On suppose la forme standard de l'équation intégro-différentille de Fredholm donnée par :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \quad \varphi^{(k)}(a) = \beta_k \quad 0 \leq k \leq n-1 \tag{3.1}$$

D'où :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_a^b h(t)\varphi(t)dt. \tag{3.2}$$

On peut voir facilement de l'équation 3.2 que l'intégrale $\int_a^b h(t)\varphi(t)dt$ est constant. On pose :

$$\alpha = \int_a^b h(t)\varphi(t)dt.$$

Et 3.2 peut être écrite comme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x) \tag{3.3}$$

On détermine le constant α pour évaluer la solution exacte $\varphi(x)$. Alors pour trouver α, on intègre l'équation 3.3 n-fois de a à x et utilisant les conditions initiales données par :

$$\varphi^{(k)}(a) = \beta_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1)$$

On obtient l'expression pour φ de la forme :

$$\varphi(x) = p(x; \alpha)$$

3.1.2 Example

Soit l'équation intégro-différentielle de Frédholm de troisième ordre :

$$\varphi'''(x) = \sin(x) - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi'(t)dt$$

avec les conditions initiales suivantes : $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$,$\varphi''(0) = -1$

Solution :

On pose :

$$\varphi'''(x) = \sin(x) - (1+\alpha)x, \quad \varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -1 \tag{3.4}$$

Où :

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi'(t)dt \tag{3.5}$$

Pour détermine α, on doit trouver un expression pour $\varphi'(t)$.
En intègrant l'équation 3.4 trois fois de 0 à x utilisants les conditions initiales alors on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\cos x - \frac{1+\alpha}{2}x^2 \\ \varphi'(x) &= -\sin x - \frac{1+\alpha}{3!}x^3 \\ \varphi(x) &= \cos x - \frac{1+\alpha}{4!}x^4 \end{aligned} \tag{3.6}$$

En remplaçant l'expression de $\varphi'(x)$ dans 3.5, on obtient :

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-t\sin t - \frac{1+\alpha}{3!}t^4)dt.$$

En remplaçant $\alpha = -1$ dans 3.6 on obtient :

$$\varphi(x) = \cos x$$

3.2 Méthode de décomposition

La méthode de décomposition Adomian a été largement mis en place pour résoudre les équations intégrales de Fredholm. Dans cette section, nous allons étudier comment cette méthode puissante peut être mise en œuvre pour déterminer une solution de série à (E.I-D) de Fredholm Nous allons prendre une forme standard pour (E.I-D) de Fredholm comme donnée par 3.1.

3.2.1 Principe de la méthode

En remplaçant le noyau $K(x,t) = g(x)h(t)$dans l'équation 3.1, on obtient :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_a^b h(t)\varphi(t)dt$$

On écrit :

$$L(\varphi) = f(x) + g(x)\int_a^b h(t)\varphi(t)dt. \tag{3.7}$$

L'opérateur différentiel $L = \frac{d^n}{dx^n}$ est un opérateur inversible, par conséquent L^{-1} est un opérateur d'intégration de n-pli et peut être considérée comme des intégrales définis de a à x pour chaque intégrale, et on remplace L^{-1} dans les deux côtés de l'équation 3.7 alors on a la formule suivante :

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \frac{1}{2!}b_2 x^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}b_{n-1}x^{n-1} + L^{-1}(f(x)) \tag{3.8}$$

$$+L^{-1}(g(x)).(\int_a^b h(t)\varphi(t))dt$$

En d'autre termes, on intègre l'équation 3.2 n fois de a à x et utilisant les conditions initiales à chaque étape de l'intégration. Il est important de noter que l'équation obtenue dans 3.8 est une équation intégrale de Fredholm .
Dans cette méthode, on définie la solution $\varphi(x)$ de 3.1 par une forme de série donnée par :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x). \tag{3.9}$$

En remplaçant l'équation 3.9 dans 3.8, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + (\int_a^b h(t)\varphi(t)dt)L^{-1}(g(x)). \tag{3.10}$$

L'équation 3.10 peut être écrite explicitement comme suivant :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+... &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}(f(x))\\ &+ \Big(\int_a^b h(t)\varphi_0(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &+ \Big(\int_a^b h(t)\varphi_1(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &+ \Big(\int_a^b h(t)\varphi_2(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &+ ...\end{aligned}\tag{3.11}$$

Les composants $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ de fonction inconnue $\varphi(x)$ sont déterminés de manière récurente par suivant :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}(f(x))\\ \varphi_1(x) &= \Big(\int_a^b h(t)\varphi_0(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ \varphi_2(x) &= \Big(\int_a^b h(t)\varphi_1(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ \varphi_3(x) &= \Big(\int_a^b h(t)\varphi_2(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &\vdots\\ \varphi_n(x) &= \Big(\int_a^b h(t)\varphi_{n-1}(t)\Big)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &\vdots\end{aligned}$$

Le schéma ci-dessus peut être écrite sous une forme compacte comme suite :

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}\big(f(x)\big)\\ \\ \varphi_{n+1}(x)=\big(\int_a^b h(t)\varphi_n(t)dt\big)L^{-1}\big(g(x)\big), \quad n\geq 0\end{cases}\tag{3.12}$$

Compte tenu de système 3.12 les composants de $\varphi(x)$ sont immédiatement déterminées, par conséquent la solution $\varphi(x)$ détermine la solution.
La série de solution est prouvée convergente parfois et donne une expression exacte pour $\varphi(x)$.
La méthode de décomposition évite massif travail de calcul et les difféculités qui proviennent d'autres travaux informatiques peut être minimisées en utilisant auto-annulation dite "phénomène de terme de bruit".

3.2.2 Phénomène du terme de bruit :

Le phénomène de terme de bruit a été introduit par Adomian et Rash et ce phénomène prouve que la solution exacte de toutes équations intégrales ou intégro-différentielles pour certaines cas peuvent être obtenue en considérant les deux premières composants $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ seulement, au lieu d'évaluer plusieurs composantes, il est utile d'éxaminer deux premières composantes $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ si on observe l'apparition de même termes dans les composants avec des signes opposés, puis en annulant ces termes .
Les restes de termes non annulés de $\varphi_0(x)$ peut certains cas fournir la solution exacte ceci peut être justifier par la substitution, les termes d'auto-annulation entre les composants $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont appelés les termes de bruit. Cependant si la solution exacte n'est pas réalisable par ce phénomène, alors nous devions continuer de déterminer les autres composants de $\varphi(x)$ pour obtenir une solution à forme fermée ou solution approchée, on éxamine maintenant de déterminer cette méthode par un exemple .

3.2.3 Exemple

Soit l'équation intégro-différentielle de Frédholm donnée par :

$$\varphi'''(x) = \sin x - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi'(t)dt, \quad \varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -1 \tag{3.13}$$

En intégrant les deux côtés de l'équation 3.13 de 0 à x trois fois et, en utilisant les conditions initiales on obtient :

$$\varphi(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi'(t)dt \tag{3.14}$$

On remplaçe la solution donnée par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x).$$

On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\big(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n(t)\big)dt. \tag{3.15}$$

On écrit explicitement :

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... + ... = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi'_0(t)dt\big)$$
$$- \frac{x^4}{4!}\big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi'_1(t)dt\big) - \frac{x^4}{4!}\big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi'_2(t)dt\big) - ... \tag{3.16}$$

On pose :

$$\varphi_0(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} \tag{3.17}$$

Et

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= -\frac{x^4}{4!}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\varphi_0'(t)dt\Big)\\ &= -\frac{x^4}{4!}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(-\sin t-\frac{t^3}{3!})dt\Big)\\ &= \frac{x^4}{4!}+\frac{\pi^5}{5!.3!.32}x^4 \qquad (3.18)\end{aligned}$$

On voit que le terme $\frac{x^4}{4!}$ apparait dans les deux équations 3.17 et 3.18 avec signes opposées, alors d'après le phénomène de bruit la solution exacte de l'équation 3.12 est $\varphi(x)=\cos x$.

3.3 Conversion une (E.I-D) de Fredholm à une (E.I) de Fredholm

Cette section est préoccupée par une technique qui permettra de réduire (E.I-D) de Fredholm à (E.I) peut être facilement faite par l'intégration des deux côtés de l'équation intégro-différentielle de Fredholm plus de fois que l'ordre de la dérivée dans l'équation de a à x, en utilisant les conditions initiales pour chaque fois qu'on intègre .

Remarque 1 :

Cette méthode est applicable que si les (E.I-D) de Frédholm implique la fonction inconnue φ seulement et pas une de ses dérivée sous la signe de l'intégrale . Ayant établir l'équation intégrale de Frédholm obtenue, on peut procéder en utilisant n'importe quel des méthodes consernées de l'équation intégrale de Fredholm : la méthode de l'alternative nommée aussi méthode de décomposition, composition directe, approximation successive, nous illustrons ceci par un exemple suivant .

3.3.1 Exemple

Soit l'équation intégro-différentielle de Frédholm de second ordre suivantes :

$$\varphi''(x)=e^x-x+x\int_0^1 t\varphi(t)dt, \quad \varphi(0)=1, \quad \varphi'(0)=1 \qquad (3.19)$$

Solution :

En réduisant 3.19 à une équation intégrale de Frédholm, on intègre les deux côtés de l'équation 3.19 deux fois de 0 à x avec les conditions initiales .
On obtient :

$$\varphi(x)=e^x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{3!}\int_0^1 t\varphi(t)dt. \qquad (3.20)$$

C'est une équation de Fredholm typique par la méthode de calcul directe, cette équation peut être écrite comme suite :

$$\varphi(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \alpha\frac{x^3}{3!} \tag{3.21}$$

Où le constant α est déterminé par :

$$\alpha = \int_0^1 t\varphi(t)dt. \tag{3.22}$$

en remplaçant 3.21 dans 3.22 on obtient :

$$\alpha = \int_0^1 t\big(e^t - \frac{t^3}{3!} + \alpha\frac{t^3}{3!}\big)dt.$$

Ce qui réduit à céder $\alpha = 1$, alors la solution peut être écrite comme $\varphi(x) = e^x$.

Remarque 2 :

Il est noter que les principales idées que nous avons appliqués sont la méthode de calcul direct et la méthode de décomposition, où les phénomènes terme de bruit a été introduit. La méthode de calcul direct fournit la solution dans une forme fermée, mais la méthode de décomposition fournit la solution d'une série convergente rapidement .

Chapitre 4

Résolution numérique des (E.I-D) de Fredholm

Interpolation polynomial :

Soit P_n sous espace de $C([a,b])$ de dimension $(n+1)$ engendré par : $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$ sont contenues dans l'intervalle $[a,b]$ on considère les $(n+1)$ paires (x_i, φ_i).
Le problème consiste à trouver un polynôme $p_n \in P_n$ telle que :

$$p_n(x_i) = c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + ... + c_n x_i^n = \varphi_i, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Les points x_i, sont appelées les nœuds d'interpolation .

Théorème 4.1 *[5] Soit les $(n+1)$ nœuds distincts $x_0, x_1, ..., x_n$ de $[a,b]$, et $(n+1)$ valeurs correspondantes $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$, alors il existe une polynôme unique $p_n \in P_n$ telle que $p_n(x_i) = \varphi_i$, $i = 0, 1, ..., n$.*

Preuve —

Existence :

Pour prouver l'existence, nous utilisons une approximation constructive fournir une expression pour p_n, noté par $\{l_i\}_{i=0}^n$ une base de P_n, p_n admet une representation sur une telle base de la forme :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i l_i(x)$$

Avec la propriété que :

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} b_j l_j(x_i) = \varphi_i, \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{4.1}$$

Si on définit

$$l_i \in P_n : l_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{4.2}$$

Alors $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, on a immédiatement à partir du 4.1 que $b_i = \varphi_i$.
Les polynômes $\{l_i, i = 0, 1, ..., n\}$ forment une base pour P_n, en conséquence le polynômes de l'interpolation existe et possède la forme suivante (appelée forme de lagrange)

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i l_i(x)$$

Unicité :

Pour prouver l'unicité, on suppose d'autre polynômes q_n de degré n existe de telle sorte que $q_n(x_i) = \varphi_i$ pour $i = 0, 1, ..., n$.

$$\begin{aligned} p_n(x_i) - q_n(x_i) &= \sum_{j=0}^{n} b_j l_j(x_i) - \sum_{j=0}^{n} a_j l_j(x_i) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (b_j - a_j) l_j(x_i) \end{aligned}$$

Le fait que $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ on a immédiatement à partir de 4.1 $a_i = \varphi_i = b_i$.
Alors le polynôme de difference $p_n - q_n$ s'annules à $(n+1)$ des points distincts et donc coïncide avec le polynôme nul d'où : $p_n = q_n$. ■

Théorème 4.2 *[5]*
Soit x et les abscisses $x_0, x_1, ..., x_n$ contenuent dans l'intervalle $[a, b]$, avec $\varphi \in C^{(n)}[a, b]$, et soit $\varphi^{(n+1)}$ existe dans $]a, b[$. Alors il existe $\xi_x \in]a, b[$ dépend de x, telle que :

$$E_n(x) = \varphi(x) - p_n(x) = F(x) \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}. \tag{4.3}$$

Où $F(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Preuve —
Si $x = x_i$, alors $E_n(x) = 0$ et l'égalité 4.3 est vérifiée trivialement ;
Supposons que $x \neq x_i \forall i = 0, 1, ..., n$ et considérons pour x fixé la fonction g définie par :

$$g(t) = E_n(t) - \frac{F(t)}{F(x)} E_n(x).$$

La fonction $g \in C^{(n+1)}([a, b])$ et s'annule en $(n+2)$ points distincts $x, x_0, x_1, ..., x_n$.
Le théorème de Rolle montre que g' admet au moins $(n+1)$ racines dans I .
D'où, en procédant par récurrence sur l'ordre de dérivation de g, la fonction $g^{(n+1)}$ admet au moins une racine dans I. Soit ξ_x cette racine. On a :

$$0 = g^{(n+1)}(\xi_x) = \varphi^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{(n+1)!}{F(x)} E_n(x)$$

D'où :

$$E_n(x) = F(x)\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

■

4.1 Méthode de collocation

4.1.1 Solution approché par une séries de polynômes de Bessel

Polynomes de Bessel de premier espèce :

Les polynôme de Bessel tronqué de dégrrée n de premier espèce, défini par :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x < +\infty \tag{4.4}$$

Principe de la méthode :[2]

Soit l'équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm d'ordre m suivante :

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)\varphi^{(k)}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + g(x), \quad 0 \leq a \leq x, t \leq b, \tag{4.5}$$

Sous les conditions mixtes :

$$\sum_{k=0}^{m-1}(a_{jk}\varphi^{(k)}(a) + b_{jk}\varphi^{(k)}(b)) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, ..., m-1. \tag{4.6}$$

Où : $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)$ est une fonction inconnue.
$\beta_k(x), g(x)$ et $K(x,t)$ sont des fonctions connues définis sur l'intervalle $a \leq x, t \leq b$.
a_{jk}, b_{jk} et λ sont des constants réels ou complexes .
Notre but est d'interpoler la solution φ de 4.5 par :

$$p_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n J_n(x), \qquad N \geq m. \tag{4.7}$$

Telle que : $a_n, n = 0, 1, 2, ..., N$ sont les coefficients inconnus de Bessel et N choisi de tel sorte qu'un nombre entier positif $N \geq m$ et $J_n(x), n = 0, 1, 2, ..., N$ sont des polynômes de Bessel du première espèce donnée par 4.4 .

p_N et φ sont égaux sur les nœuds $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_N \leq b$.
Le faite que toutes les valeurs $\varphi(x_i)$ sont inconnues on peut utiliser 4.5 pour trouver les polynômes de l'interpolation au $x_0, x_1, ..., x_N$ sans connaître les valeurs $\varphi(x_i)$. Pour faire ça Nous avons mis l'interplation polynômial p_N :

$$p_N(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2... + c_Nx^N$$

dans 4.5 .
Si p_N égale φ sur les nœuds, alors p_N satisfait 4.5, d'où on peut obtenir un système d'équations linéairement dépendantes à $c_0, c_1, ..., c_N$.
Par conséquent, nous pouvons trouver la solution 4.5 avec quelques erreurs qui sont erreurs de l'interpolation et computationnels.

4.1.1.1 Relations fondamentales :

On écrit $J_n(x)$ sous forme matriciel comme suite :

$$J^T(x) = \mathbf{D}X^T(x) \Longleftrightarrow J(x) = X(x)\mathbf{D}^T. \tag{4.8}$$

Où :

$$J(x) = [j_0(x) \quad j_1(x) \quad ... \quad j_N(x)] \quad et \quad X(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad ... \quad x^N]$$

Si N est impair :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^2} & \cdots & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N-1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^N} \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & \cdots & \frac{(-1)^{\frac{N-3}{2}}}{(\frac{N-3}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{0!N!2^N} \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

Si N est pair :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^2} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!2^N} \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \cdots & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!2^N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{0!N!2^N} \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

On pose 4.5 sous la forme :

$$D(x) = g(x) + \lambda I(x) \tag{4.9}$$

Telle que :

$$D(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)\varphi^{(k)}(x), \quad et \quad I(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

maintenant on convertit la solution $\varphi(x)$ et ses dérivées $\varphi^{(k)}(x)$, la partie $D(x)$ et $I(x)$ et les conditions mixtes de 4.6 aux formes matriciels .

1- La forme matricielle pour la partie différentielle $D(x)$:

On considère la solution voulue $\varphi(x) = p_N(x)$ de l'équation4.5 défini par la série de Bessel tronquée 4.4
On écrit la relation 4.9 sous la forme matricielle :

$$[\varphi(x)] = J(x)A; \quad A = [a_0 \quad a_1 \quad ... \quad a_N]^T \tag{4.10}$$

De 4.8 on a :

$$[\varphi(x)] = X(x)\mathbf{D}^T A. \tag{4.11}$$

On a aussi la relation entre la matrice $X(x)$ et ses dérivés $X^{(1)}(x)$ comme suite :

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \tag{4.12}$$

Où

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

De l'équation 4.12 on écrit sous forme récurrente .

$$\begin{cases} X^{(0)}(x) = X(x) \\ X^{(1)}(x) = X(x)B^T \\ X^{(2)}(x) = X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2 \\ \vdots \\ X^{(k)}(x) = X^{(k-1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^k. \end{cases} \tag{4.13}$$

Utilisant 4.11 et 4.13 on obtient

$$\varphi^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)\mathbf{D}^T A = X(x)(B^T)^k\mathbf{D}^T A, \quad k = 0, 1, 2, ..., m \tag{4.14}$$

on remplaçant 4.14 dans 4.9 on obtient la relation matricielle :

$$[D(x)] = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)X(x)(B^T)^k\mathbf{D}^T A. \tag{4.15}$$

2-La forme matricielle pour la partie intégrale $I(x)$:

Le noyau $K(x,t)$ peut être approcher par la série de Maclaurin tronquée et la série de Bessel tronquées. respèctivement :

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} k^t_{mn}x^m t^n \quad et \quad K(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} k^b_{mn}J_m(x)J_n(t), \tag{4.16}$$

Où

$$k_{mn}^{t}=\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}k(0,0)}{\partial x^{m}\partial t^{n}};\quad m,n=0,1,2,...,N.$$

On pose les relations données à 4.16 aux formes matricielles suivantes :

$$K(x,t)=X(x)K_{t}X^{T}(t),\quad K_{t}=\left[k_{mn}^{t}\right],\quad m,n=0,1,...,N. \tag{4.17}$$

Et

$$K(x,t)=J(x)K_{b}J^{T}(t),\quad K_{b}=\left[k_{mn}^{b}\right],\quad m,n=0,1,...,N. \tag{4.18}$$

De l'équation 4.17 et 4.18 on obtient les relations suivantes :

$$X(x)K_{t}X^{T}(t)=J(x)K_{b}J^{T}(t)\Longrightarrow X(x)K_{t}X^{T}(t)=X(x)\mathbf{D}^{T}K_{b}\mathbf{D}X^{T}(t),$$

D'où

$$K_{t}=\mathbf{D}^{T}K_{b}\mathbf{D}\quad ou\quad K_{b}=(\mathbf{D}^{T})^{-1}K_{t}\mathbf{D}^{-1}. \tag{4.19}$$

En remplaçant les formes matricielles 4.10 et 4.18 dans la partie intégrale $\left[I(x)\right]$ en 4.9, on obtient la forme matricielle :

$$\begin{aligned}\left[I(x)\right] &= \int_{a}^{b}J(x)K_{b}J^{T}(t)J(t)Adt\\ &= J(x)K_{b}QA\end{aligned} \tag{4.20}$$

Telle que :

$$\begin{aligned}Q &= \int_{a}^{b}J^{T}(t)J(t)dt,\\ &= \int_{a}^{b}\mathbf{D}X^{T}(t)X(t)\mathbf{D}^{T}dt\\ &= \mathbf{D}H\mathbf{D}^{T};\end{aligned}$$

D'où

$$H=\int_{a}^{b}X^{T}(t)X(t)dt=[h_{ij}]$$

Avec :

$$h_{ij}=\frac{b^{i+j+1}-a^{i+j+1}}{i+j+1}\quad ,i,j=0,1,2,...,N.$$

En remplaçant la matrice 4.8 dans l'expression 4.20 on obtient la forme matricielle suivante :

$$\left[I(x)\right]=X(x)\mathbf{D}^{T}K_{b}QA. \tag{4.21}$$

3-La forme matricielle pour les conditions mixtes :

On peut obtenir les formes matricielles correspondantes pour les conditions 4.6 et par 4.14 comme suivant :

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_{jk}X(a)+b_{jk}X(b)\right](B^{T})^{k}\mathbf{D}^{T}A=[\alpha_{j}],\quad j=0,1,2,...,m-1. \tag{4.22}$$

maintenant on a l'équation matricielle correspondant à l'équation 4.5, pour ce but on remplaçe les relations matricielles 4.15 et 4.21 dans 4.9.
Donc on a :

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_k(x) X(x) (B^T)^k \mathbf{D}^T A = g(x) + \lambda X(x) \mathbf{D}^T K_b Q A. \tag{4.23}$$

En utilisant les points de collocation définis par :

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, ..., N.$$

Dans l'équation 4.23,on obtient le système matriciel :

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_k(x_i) X(x_i) (B^T)^k \mathbf{D}^T A = g(x_i) + \lambda X(x_i) \mathbf{D}^T K_b Q A, \quad i = 0, 1, 2, ..., N.$$

On écrit abréviativement :

$$\Big\{ \sum_{k=0}^{m} \beta_k X (B^T)^k \mathbf{D}^T - \lambda X \mathbf{D}^T K_b Q \Big\} A = G, \tag{4.24}$$

Où :

$$\beta_k = \begin{pmatrix} \beta_k(x_0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_k(x_1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_k(x_N) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix},$$

Et

$$X = \begin{pmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{pmatrix}$$

Donc la matrice fondamentale de l'équation 4.24 correspondante à l'équation 4.5 peut être écrit sous la forme :

$$WA = G \quad ou \quad [W; G]; \quad W = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X (B^T)^k \mathbf{D}^T - \lambda X \mathbf{D}^T K_b Q \tag{4.25}$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{m} \beta_k X (B^T)^k - \lambda X K_t H \Big) \mathbf{D}^T$$

On note que l'équation 4.25 correspondant à système de $(N+1)$ équations algebriques linéaires avec les coefficients inconnus de Bessel $a_0, a_1, ..., a_N$.
D'autre côté la forme matricielle des conditions initiales de 4.22 peut être écrite :

$$U_j A = [\alpha_j] \quad ou \quad [U_j; \alpha_j]; \qquad j = 0, 1, 2, ..., m-1 \tag{4.26}$$

Où

$$\begin{aligned} U_j &= \sum_{k=0}^{m-1} \Big[a_{jk} X(a) + b_{jk} X(b) \Big] (B^T)^k \mathbf{D}^T \quad j = 0, 1, 2, ..., m-1 \\ &= \big[U_{j0} \quad U_{j1} \quad U_{j2} \quad ... \quad U_{jN} \big], \quad j = 0, 1, 2, ..., m-1. \end{aligned}$$

Remarque :

Pour obtenir la solution approchée de 4.5 sous les conditions 4.6, on remplaçe les m dernières lignes de la matrice U_j et α_j par les m derières lignes de la matrice W et G respectivement .
On obtient :

$$\widetilde{W}A = \widetilde{G}.$$

Pour simplicité, si dernières lignes de la matrice 4.25 sont remplacées, la nouvelle matrice augmentée du système précité est comme suite :

$$[\widetilde{W}, \widetilde{G}] = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m0} & w_{N-m1} & w_{N-m2} & \dots & w_{N-mN} & ; & g(x_{N-m}) \\ U_{00} & U_{01} & U_{02} & \dots & U_{0N} & ; & \alpha_0 \\ U_{10} & U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1N} & ; & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ U_{m-10} & U_{m-11} & U_{m-12} & \dots & U_{m-1N} & ; & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Notons que $rang\widetilde{W} = rang[\widetilde{W}; \widetilde{G}] = N+1$,si ce n'est pas, ce serait une contradiction à théorème 4.1 donc nous pouvons écrire :

$$A = (\widetilde{W})^{-1}\widetilde{G}$$

Les éléments $a_0, a_1, a_2, ..., a_N$ de A sont déterminés de façon unique .

4.1.2 Solution approché par une séries de Taylor

Principe de la méthode :[14], [13]

Une méthode de matrice pratique, est présentée pour trouver une solution approchée de les équations intégro-différentielles de Fredholm linéaires, en terme de polynôme de Taylor . La méthode convertit l'E.I-D à un système matriciel qui correspand à un système des équations algèbriques linéaires .
Soit l'E.I-D de Fredholm d'ordre m

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)\varphi^{(k)}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + g(x), \quad a \leq x, t \leq b, \tag{4.28}$$

Avec les conditions mixtes :

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}\varphi^{(k)}(a) + b_{ik}\varphi^{(k)}(b) + c_{ik}\varphi^{(k)}(c)) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, ..., m-1. \tag{4.29}$$

Où : $\lambda, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$ et α_i sont des constants avec $a \leq c \leq b$.
$\beta_k(x), g(x)$ et $K(x,t)$ sont définis sur l'intervalle $[a, b]$.
La solution $\varphi(x)$ sera exprimé par la série de Taylor suivant :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-c)^n, \quad a_n = \frac{\varphi^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 0, 1, ..., N. \tag{4.30}$$

Le but de cette méthode est de déterminer les coefficients $a_n, \quad n = 0, 1, ..., N$.

4.1.2.1 Relations matricielles fondamentales :

On pose 4.28 sous forme :

$$D(x) = g(x) + \lambda I(x) \tag{4.31}$$

Avec :

$$D(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)\varphi^{(k)}(x) \quad et \quad I(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

maintenant, on va convertir la solution $\varphi(x)$ et ses dérivées $\varphi^{(k)}(x)$, la partie différentielle $D(x)$ et la partie intégrale $I(x)$ et les conditions mixtes aux formes matricielles .

1-Forme matricielle pour la partie différentielle $D(x)$:

On considère la solution voulue $\varphi(x)$ de 4.28 définie par la série de Taylor

$$[\varphi(x)] = X(x)A \tag{4.32}$$

Où :

$$X(x) = [1, (x-c), (x-c)^2, ..., (x-c)^N], et \qquad A = (a_0, a_1, ..., a_N)^T$$

On a aussi la relation entre $X(x)$ et ses dérivées est

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \tag{4.33}$$

Où :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{pmatrix}$$

De la matrice 4.33 on obtient :

$$\begin{cases} X^{(1)}(x) = X(x)B^T \\ X^{(2)}(x) = X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2 \\ \vdots \\ X^{(k)}(x) = X^{(k-1)}(x)(B^T)^{(k-1)} = X(x)(B^T)^k \end{cases} \tag{4.34}$$

De 4.32 et 4.34 la relation de récurente sera :

$$\varphi^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)A = X(x)(B^T)^k A, \quad k = 0, 1, 2, ..., m \tag{4.35}$$

En substituant 4.35 en 4.31 on obtient :

$$[D(x)] = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)X(x)(B^T)^k A \tag{4.36}$$

2-Forme matricielle pour la partie intégrale $I(x)$:

Le noyau $k(x,t)$ peut être approximmé par la série de Taylor de degré N sur $x=c$ et $t=c$ sous la forme :

$$K(x,t)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}k_{mn}(x-c)^m(t-c)^n \tag{4.37}$$

Avec :

$$k_{mn}=\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}K(c,c)}{\partial x^m\partial t^n}\qquad n,m=0,1,...,N$$

On pose 4.37 sous forme matricielle :

$$[K(x,t)]=X(x)KX^T(t) \tag{4.38}$$

Où

$$X(t)=[1,(t-c),\quad ....\quad,(t-c)^N]\quad et\quad K=[k_{mn}],\quad m,n=0,1,...,N$$

En subistituant la forme 4.32 et 4.38 dans 4.31,on a la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b X(x)KX^T(t)X(t)Adt \\ &= X(x)K\{\int_a^b X^T(t)X(t)dt\}A \\ &= X(x)KQA \end{aligned} \tag{4.39}$$

Avec :

$$Q=\int_a^b X^T(t)X(t)dt=[q_{ij}],\quad q_{ij}=\frac{(b-c)^{i+j+1}-(a-c)^{i+j+1}}{i+j+1},i,j=0,1,2,...,N$$

3-Réprésentation matricielle pour $g(x)$:

Le terme nonhomogène de l'équation 4.28 $g(x)$ peut s'écrire sous forme :

$$\begin{aligned} [g(x)] &= \Big[\sum_{n=0}^{N}g_n(x-c)^n\Big],\quad g_n=\frac{g^{(n)}(c)}{n!} \\ &= X(x)G \end{aligned} \tag{4.40}$$

Avec :

$$G=[g_0,g_1,\quad ...\quad,g_N]^T$$

En remplaçant les relations 4.36 et 4.39 et 4.40 dans 4.31 il en résulte l'équation suivante :

$$\sum_{k=0}^{m}\beta_k(x)X(x)(B^T)^kA=X(x)G+\lambda X(x)KQA \tag{4.41}$$

4-Répresentation matricielle pour les conditions mixtes :

On peut obtenir la forme matricielle de conditions 4.29 de 4.35 on a :

$$\sum_{k=0}^{m-1}[a_{ik}X(a)+b_{ik}X(b)](B^T)^kA=[\alpha_i], \quad i=0,1,2,...,m-1 \tag{4.42}$$

Pour calculer les coeffecients a_n, on utilise les points de collocations suivantes :

$$x_i=a+\frac{b-a}{N}i, \quad i=0,1,...,N \tag{4.43}$$

Telle que :$a\leq x_i\leq b$ et $a=x_0<x_1<...<x_{N-1}<x_N=b$ dans l'équation 4.41.
On obtient :

$$\sum_{k=0}^{m}\beta_k(x_i)X(x_i)(B^T)^kA=X(x_i)G+\lambda X(x_i)KQA, \quad i=0,1,...,N$$

On écrit abreviativement :

$$\{\sum_{k=0}^{m}\beta_k(B^T)^k-\lambda KQ\}A=G \tag{4.44}$$

Telle que :

$$\beta_k=\begin{pmatrix}\beta_k(x_0) & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \beta_k(x_1) & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_k(x_N)\end{pmatrix}, \quad G=\begin{pmatrix}g_0\\ g_1\\ \vdots\\ g_N\end{pmatrix}, \quad A=[a_0,a_1,...,a_N]^T$$

L'équation 4.44 correspand à une système de $(N+1)$ équations algèbriques pour $(N+1)$ coeffecients de Taylor innconnus, Alors on peut ecrire 4.44 abreviativement :

$$WA=G \quad ou \quad :[W;G] \tag{4.45}$$

Avec :

$$W=[w_{pq}]=\sum_{k=0}^{m}\beta_k(B^T)^k-\lambda KQ \quad avec \quad p,q=0,1,...,N$$

Du même façon, la forme matricielle pour les conditions mixtes dans 4.42 peut être écrite comme

$$U_iA=[\alpha_i] \quad ou: \quad [U_i;\alpha_i], \quad i=0,1,...,m-1 \tag{4.46}$$

Avec :

$$\begin{aligned}U_i &= \sum_{k=0}^{m-1}\big[a_{ik}X(a)+b_{ik}X(b)+c_{ik}X(c)\big](B^T)^k\\ &= \big[u_{i0} \quad u_{i1} \quad ... \quad u_{iN}\big], \quad i=0,1,2,...,m-1\end{aligned}$$

En remplaçant les lignes du matrice 4.46 par les lignes de dernières m lignes du 4.45, on résulte la nouvelle matrice augmentée .

$$[\widetilde{W};\widetilde{G}] = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & g_0 \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \dots & w_{N-m,N} & ; & g_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \alpha_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

Si $rang\widetilde{W} = rang[\widetilde{W};\widetilde{G}] = N+1$, alors :

$$A = (\widetilde{W})^{-1}\widetilde{G} \tag{4.48}$$

Et la matrice A ainsi les coeffecients $(a_n, n = 0, 1, ..., N)$ sont déterminés de façon unique, donc l'équation 4.28 avec les conditions 4.29 a une solution unique est donnée par polynôme de Taylor 4.30

4.1.3 Estimation d'erreurs :

Soit $E_N(x)$ est la fonction d'erreur qui provient du solution mise en série de Bessel ou série de Taylor dans 4.7 et 4.30 respectivement.

$$\begin{aligned} E_N &: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ E_N(x) &= \sum_{k=0}^{m} \beta_k(x)\varphi_N^{(k)}(x) - g(x) - \lambda I(x), \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

Les erreurs de calcul sont minimales, si $E_N(x)$ est équivalente à la fonction nulle sur les noeuds $x_0, x_1, ..., x_N$.

$$E(x_i) = \Big|D(x_i) - g(x_i) - \lambda I(x_i)\Big| \cong 0$$

On définit la solution d'erreurs absolues :

$$E_N(x) = \Big|\varphi(x) - \varphi_N(x)\Big|$$

Pour trouver les erreurs de calcul sur les noeuds de l'intervalle donnée, on écrit :

$$E_N(x_i) = \Big|\varphi(x_i) - \varphi_N(x_i)\Big|, \quad i = 0, 1, ..., N$$

Avec $\varphi(x)$: la valeur de solution exacte
Et $\varphi_N(x)$: est le polynôme du solution approchée ; polynôme de (Bessel ou Taylor)

4.2 Exemples

Exemple 1

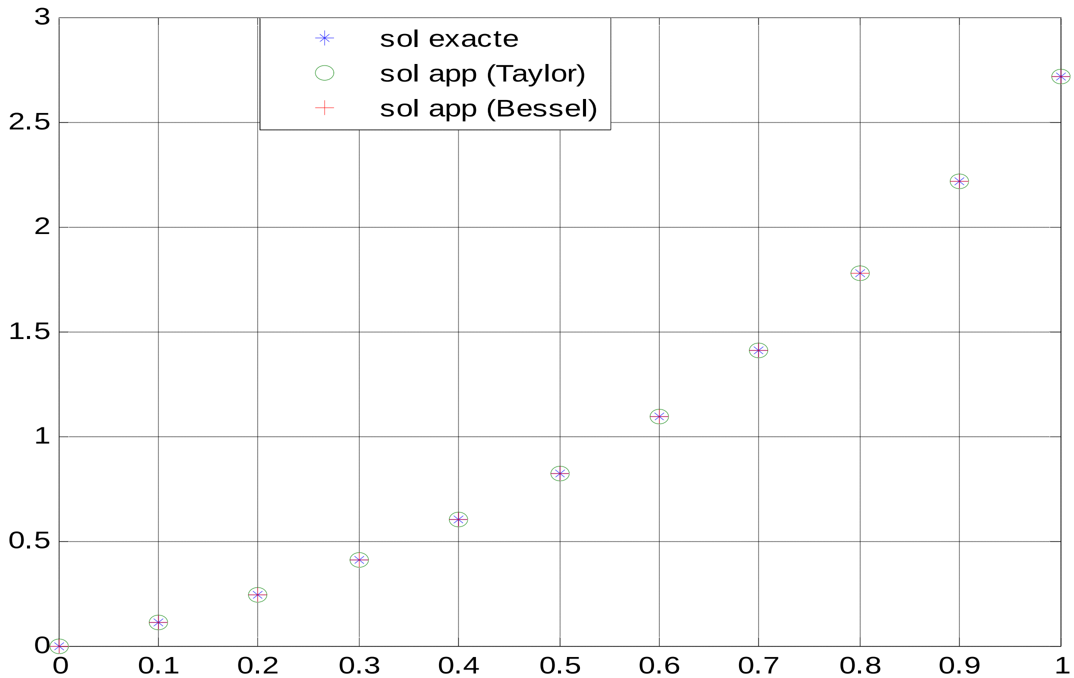
Soit l'equation intégro-differentielle de Fredholm de premier ordre :

$$\begin{cases} \varphi'(x) - \varphi(x) = e^x - x + \int_0^1 x\varphi(t)dt \\ \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est $\varphi(x) = xe^x$
Pour $N = 10$ et $h = 0.1$, $c = 0$, $\lambda = 1$ on a :
$\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$

Comparaison numérique des solutions approchées de l'equation intégro-différentielle de Fredholm et solution exacte par la méthode de collocation de Taylor et Bessel.

noeud	sol exact	sol app (Taylor)	erreur	sol app (Bessel)	erreur
0.0	0.00000000	0.00000000	2.22044605e-016	-0.00000000	1.08779769e-016
0.1	0.11051709	0.11051709	1.65714734e-010	0.11051709	1.30176425e-012
0.2	0.24428055	0.24428055	6.85910218e-010	0.24428055	1.2416792e-012
0.3	0.40495764	0.40495764	1.59835134e-009	0.40495764	1.46344048e-012
0.4	0.59672988	0.59672988	2.95474423e-009	0.59672988	1.61382019e-012
0.5	0.82436064	0.82436063	4.90708207e-009	0.82436064	1.85484961e-012
0.6	1.09327128	1.09327127	8.17551293e-009	1.09327128	2.06523687e-012
0.7	1.40962690	1.40962688	1.58720970e-008	1.40962690	2.41073828e-012
0.8	1.78043274	1.78043270	3.91529049e-008	1.78043274	2.52486920e-012
0.9	2.21364280	2.21364269	1.12057029e-007	2.21364280	4.14823731e-012
1.0	2.71828183	2.71828150	3.25904985e-007	2.71828183	4.73261430e-011



F ig . 1. Comparaison entre la solution exacte est la solution approchée de Taylor et Bessel .

Exemple 2

Soit l'equation intégro-differentielle de Fredholm de deuxième ordre :

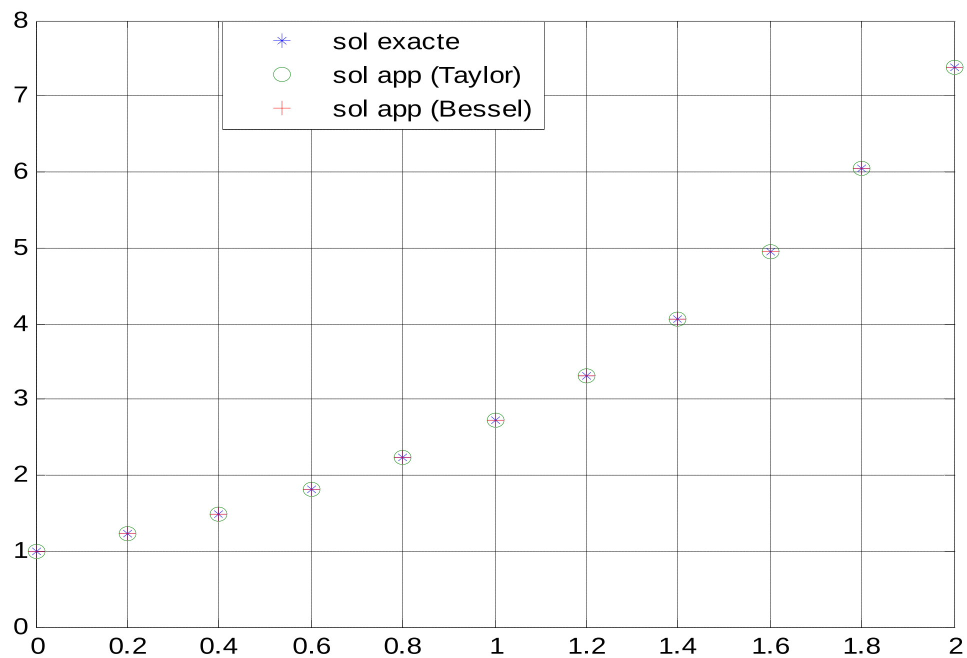
$$\begin{cases} \varphi''(x) + x\varphi'(x) - x\varphi(x) = \int_0^2 \sin(x)e^{-t}\varphi(t)dt + e^x - 2\sin(x) \\ \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est :$\varphi(x) = e^x$
Pour $N = 10$ et $h = 0.1$, $c = 0$, $\lambda = 1$ on a :

$\beta_0 = -x, \beta_1 = x, \beta_2 = 1$

Comparaison des solutions approchées de l'equation intégro-différentielle de Fredholm et la solution exacte par la méthode de collocation de Taylor et Bessel .

noeud	sol exacte	sol app (Taylor)	erreur	sol app (Bessel)	erreur
0.0	1.00000000	1.00000000	0.00000000e+000	1.00000000	0.00000000e+000
0.2	1.22140276	1.22140283	6.77156391e-008	1.22140283	6.97408813e-008
0.4	1.49182470	1.49182523	5.30099475e-007	1.49182524	5.46940393e-007
0.6	1.82211880	1.82212055	1.74844222e-006	1.82212058	1.78432343e-006
0.8	2.22554093	2.22554497	4.04320963e-006	2.22554497	4.04458250e-006
1.0	2.71828183	2.71828950	7.67483998e-006	2.71828932	7.49078111e-006
1.2	3.32011692	3.32012967	1.27497984e-005	3.32012912	1.21996239e-005
1.4	4.05519997	4.05521882	1.88552262e-005	4.05521816	1.81968078e-005
1.6	4.95303242	4.95305634	2.39128143e-005	4.95305795	2.55285857e-005
1.8	6.04964746	6.04966859	2.11241899e-005	6.04968188	3.44188197e-005
2.0	7.38905610	7.38904787	8.22451933e-006	7.38910167	4.55751631e-005



F ig . 2. Comparaison entre la solution exacte est la solution approchée de Taylor et Bessel .

Exemple 3

Soit l'equation intégro-differentielle de Fredholm de cinquième ordre :

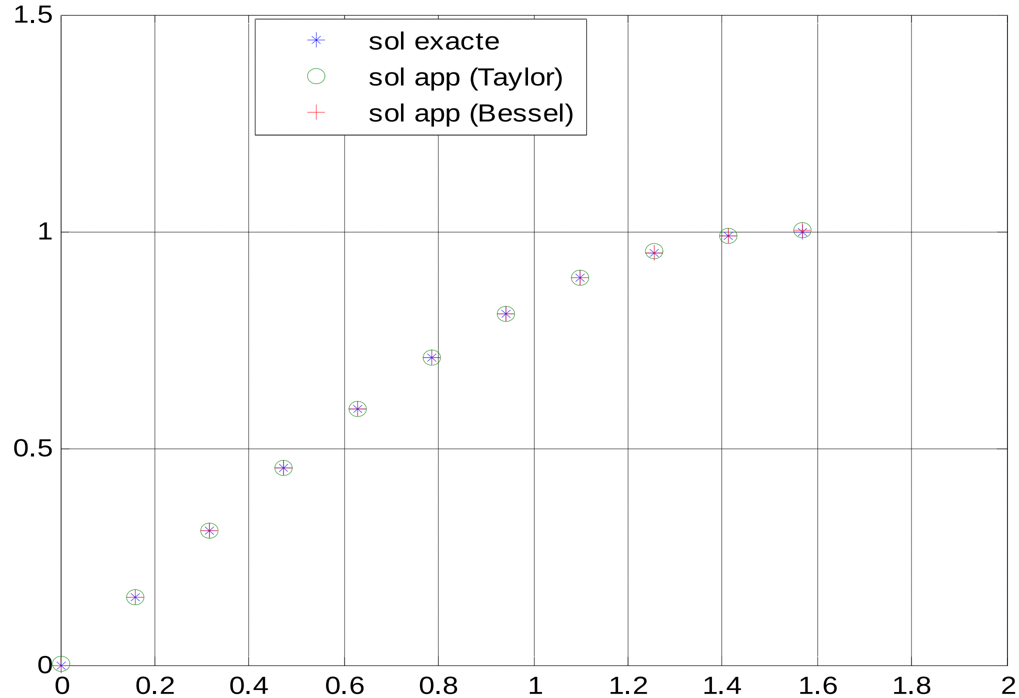
$$\begin{cases} \varphi^{(5)}(x) - x^2\varphi^{(3)}(x) - \varphi^{(1)}(x) - x\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)dt + x^2\cos(x) - x\sin(x) - 1 \\ \varphi(0) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0, \quad \varphi^{1}(0) = 1, \quad \varphi^{(3)}(0) = -1 \end{cases}$$

La solution exacte est : $\varphi(x) = \sin(x)$ Pour $N = 10, h = 0.1, c = 0$ et $\lambda = -1$

On a : $\beta_0 = -x, \beta_1 = -1, \beta_2 = 0, \beta_3 = -x^2, \beta_4 = 0, \beta_5 = 1$

Comparaison des solutions approchées de l'equation intégro-différentielle de Fredholm et la solution exacte par la méthode de collocation de Taylor et Bessel .

noeud	sol exact	sol app (Taylor)	erreur	sol app (Bessel)	erreur
0.0	0.00000000	0.00000000	2.82715972e-016	0.00000000	0.00000000e+000
0.2	0.15643447	0.15643447	3.76453688e-009	0.15643447	1.57929225e-013
0.3	0.30901699	0.30901722	2.28234612e-007	0.30901699	5.33562083e-012
0.5	0.45399050	0.45399305	2.54609531e-006	0.45399050	3.43595152e-011
0.6	0.58778525	0.58779928	1.40257851e-005	0.58778525	1.20473853e-010
0.8	0.70710678	0.70715883	5.20469395e-005	0.70710678	3.11314974e-010
0.9	0.80901699	0.80916618	1.49184906e-004	0.80901699	6.69150180e-010
1.1	0.89100652	0.89136100	3.54471654e-004	0.89100652	1.21862276e-009
1.3	0.95105652	0.95178212	7.25601033e-004	0.95105652	9.99309413e-010
1.4	0.98768834	0.98899250	1.30416258e-003	0.98768835	7.98520405e-009
1.6	1.00000000	1.00206307	2.06307254e-003	1.00000006	6.49898997e-008



F ig . 3. Comparaison entre la solution exacte est la solution approchée de Taylor et Bessel .

Conclusion générale

Notre but est de faire un résolution numérique des équations intégro-différentielle de type de Fredholm dont on ne connait pas leurs solutions numériques, on a intéressés à des équations intégro-différentielles (E.I-D) de Fredholm linéaire .

On a consacré aux méthodes sophistiqués exactes de résolutions des (E.I-D) de Fredholm, on a intéressé sur les équations qui impliquent des noyaux degénérées, telles que la méthode de computation directe et méthode de décomposition, ainsi que méthode de conversion une (E.I-D) de Fredholm à une (E.I) de Fredholm, où cette dernière méthode est applicable que si les (E.I-D) de Fredholm implique la fonction inconnue φ seulement et pas une de ses dérivée sous la signe de l'intégration .

La méthode numérique que on a appliqués est une méthode de collocation, où on a approché la solution sous forme de polynôme de Bessel de premier espèce, ainsi que polynôme de Taylor on peut appliquer cette dernière pour les équations différentielles si $\lambda = 0$, et aussi pour les équations intégrales si la partie différentielle est nulle [13].

On a illustré à la fin de notre mémoire des exemples avec la programation par logiciel de calcul numérique (MATLAB), où on a estimé les erreurs pour les deux méthodes de comparer les solutions approchées avec la solution exacte .

Bibliographie

[1] A.Ebadian, P.Darania. *A Method For The Numerical Solution of The Integro-differential Equations* . Applied Mathematics and Computation, 657-668, 2007.

[2] A.Yildirim, N.Şahin, Ş.Yüzbaşi. *A collocation approach for solving high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, 547-563, 2012.

[3] E.Varley, J.Walker. *A method for solving singular integro-differential equation.* IMA. Journal of Applied Mathematics 11-45, 1989

[4] J.Niedziela. *Bessel Functions And Their Application.* University of Tennessee-Knoxville, 2008.

[5] H.M.Antia. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, ISBN, 1991.

[6] K.Allab. *Eléments D'analyse, Fonction d'une variable réelle* 1^{re} *et* 2^{eme} *années D'université. Ecoles Scientifiques.* Ecoles Scientifiques, 1990.

[7] M.Nadir.*Cours de Magistère.* Université de M'sila, 2010.

[8] M.T.Rashed. *Numerical Solution of a Special Type of Integro-differential Equations.* Applied Mathematics and Computation, 73-88, 2003.

[9] M.T.Rashed. *Lagrange Interpolation to Compute The Numerical Solutions of Differential Integro-differential Equations.* Applied Mathemetics and Computation, 869-878, 2004.

[10] M.I.Berengue, M.V.Fernàndez.Mum̃oz*, A.I.Garralda.Guillem, M.Ruiz.Galán. *A Sequential Approch for Solving The Fredholm Integro-differential Equation.* Applied Numerical Mathematics, 2011.

[11] M.Moussaï. *Les Solutions Des Equations Intégrales Et Différentielles* . Mémoire de Magistère, Université de M'sila, 2009/2010.

[12] M.Rahman. *Integral Equations and Their Applications.* WITpress. Southampton, Boston, 2007.

[13] M.Sezer, N.Kurt. *Polynomial Solution of High-order Linear Fredholm Integro-differential Equations With Constant Coefficients.* Freklin Institute, 839-850, 2008.

[14] M.Sezer, S.Yalçinbaş *A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm-Volterra integro-difference equations with mixed argument.*Applied Mathematics and Computation, 675-690, 2006.

[15] P.Kumlin. *A Note on Fixed Point Theory.* Mathematics, Chalmers and Gu, 2003/2004

[16] P.Linz. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.* SIAM Studies in Applied Mathematics, 1985.

[17] P.Linz.*A general theory of the approximate solution of operator equations of the second kind.*SIAM Journal on Numerical Analysis, 543-554, 1977.